

X suit la loi exponentielle de paramètre μ . On note Y la partie entière de X , et $Z = X - Y$.

1. a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ car $p(X < 0) = 0$
b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} p(Y = k - 1) &= p(k - 1 \leq X < k) = \int_{k-1}^k \mu e^{-\mu t} dt = [-e^{-\mu t}]_{t=k-1}^k \\ &= e^{-\mu(k-1)} - e^{-\mu k} = e^{-\mu(k-1)} (1 - e^{-\mu}) \end{aligned}$$

- c) Et $(\bar{Y} + 1)(\Omega) = [1, +\infty[: p(Y + 1 = k) = e^{-\mu(k-1)} (1 - e^{-\mu}) = (e^{-\mu})^{k-1} (1 - e^{-\mu})$
On reconnaît donc que $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\mu})$

$$\text{d) Donc } E(Y + 1) = \frac{1}{1 - e^{-\mu}} \text{ et } E(Y) = \frac{1}{1 - e^{-\mu}} - 1$$

2. a) Pour $0 \leq x < 1$, On applique la formule des probabilités totales avec $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'événements :

$$p(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(Z \leq x \cap Y = k)$$

Avec $(Z \leq x \cap Y = k) = (X - [X] \leq x \cap [X] = k) = (k \leq X \leq k + x)$ car $0 \leq x < 1$
Et comme

$$\begin{aligned} p(k \leq X \leq k + x) &= \int_k^{k+x} \mu e^{-\mu t} dt = (e^{-\mu k} - e^{-\mu(k+x)}) \\ &= (1 - e^{-\mu x}) e^{-\mu k} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} p(Z \leq x) &= (1 - e^{-\mu x}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\mu})^k \\ &= \frac{1 - e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu}} \end{aligned}$$

(la série est convergente d'après le th des probabilités totales)

- b) Donc la fonction de répartition de Z est :

- $G(x) = 0$ si $x < 0$
- $G(x) = \frac{1 - e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu}}$ si $x \in [0, 1[$
- $G(x) = 1$ si $x \geq 1$

G est continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

- en 0^- on a $G(x) = 0 \rightarrow 0$ et comme $G(0) = \frac{1 - e^{-\mu 0}}{1 - e^{-\mu}} = 0$ alors G est continue en 0
- En 1^- on a $G(x) = \frac{1 - e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu}} \rightarrow \frac{1 - e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}} = 1 = G(1)$ donc G continue en 1.

et G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

Finalement Z est une variable à densité de densité $g(x) = G'(x) = \frac{\mu e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu}}$ si $x \in [0, 1[$ et 0 ailleurs.

c) On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt$ impropre en $\pm\infty$:

$\int_{-\infty}^0 tg(t) dt = 0$ et $\int_1^{+\infty} tg(t) dt = 0$ il reste donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 tg(t) dt &= \int_0^1 t \frac{\mu e^{-\mu t}}{1 - e^{-\mu}} dt \\ &= \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \int_0^1 te^{-\mu t} dt \quad \text{à la volée} \\ &= \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \left[-\frac{1}{\mu} te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu^2} e^{-\mu t} \right]_0^1 \\ &= \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \left(-\frac{1}{\mu} e^{-\mu} - \frac{1}{\mu^2} (e^{-\mu} - 1) \right) \\ &= -\frac{e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}} + \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

Donc Z a une espérance qui est : $E(Z) = \frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}}$

On aurait pu passer par $E(X) = \frac{1}{\mu}$ et $E(Y) = \frac{1}{1 - e^{-\mu}} - 1 = \frac{e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}}$ donc

$$E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}}$$

Mais on n'a pas le théorème dans le cours pour un mélange de variables discrètes et à densité.