

Dans ce problème X désigne une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite, φ sa densité de probabilité et Φ sa fonction de répartition. On note par ailleurs f la densité de la loi exponentielle de paramètre égal à 1.

On définit également pour tout nombre réel x , $g(x) = -\ln(1 - \Phi(x))$ puis $Y = g(X)$.

On admettra que X admet des moments de tout ordre, ce qui signifie que pour tout entier naturel k , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \varphi(x) dx$ converge.

0.1 Partie 1 Quantiles gaussiens

On démontre dans cette partie des résultats utiles pour la partie 2.

1. Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\varphi > 0$.

Comme Φ est une fonction de répartition alors $\lim_{-\infty} \Phi = 0$ et $\lim_{+\infty} \Phi = 1$

Donc Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $] \lim_{-\infty} \Phi, \lim_{+\infty} \Phi[=]0, 1[$.

Conclusion : Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ ce qui garantit que Y est bien défini puisque $1 - \Phi(x) > 0$.

On notera Φ^{-1} l'application réciproque.

2. Soit F la fonction de répartition de Y .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(g(X) \leq x) \\ &= P(-\ln(1 - \Phi(X)) \leq x) \end{aligned}$$

on résout l'inéquation

$$\begin{aligned} -\ln(1 - \Phi(X)) \leq x &\iff \ln(1 - \Phi(X)) \geq -x \\ &\iff 1 - \Phi(X) \geq e^{-x} \\ &\iff \Phi(X) \leq 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Pour prendre l'image par la réciproque, on a besoin de $1 - e^{-x} \in]0, 1[$ ce qui équivaut à $x > 0$

Pour $x > 0$: $(Y \leq x) \iff X \leq \Phi^{-1}(1 - e^{-x})$

Pour $x \leq 0$: $(Y \leq x)$ est impossible.

Donc

- pour $x \leq 0$: $F(x) = 0$
- pour $x > 0$: $F(x) = P(X \leq \Phi^{-1}(1 - e^{-x})) = \Phi(\Phi^{-1}(1 - e^{-x})) = 1 - e^{-x}$

et on reconnaît bien là la fonction de répartition d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

Conclusion : $Y \hookrightarrow \varepsilon(1)$

Variante : on peut aussi vérifier les critères

- continue sur $\mathbb{R}$ (vérification à faire en 0)
- de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$
- dérivée : $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ donc croissante sur $\mathbb{R}$

donc Y est à densité et sa densité est 0 sur $\mathbb{R}^-$ et e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$ et on reconnaît là encore la densité d'une loi exponentielle.

3. a) la formule ressemble au résultat d'une intégration par parties.

$$\text{On a } 1 - \Phi(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

et on fait apparaître un t qui se mariera avec le $e^{-t^2/2}$ pour faire apparaître une dérivée de composée.

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} \frac{1}{t} dt$$

Puis on repasse à l'intégrale finie pour intégrer par parties :

avec $u'(t) = t e^{-t^2/2}$: $u(t) = -e^{-t^2/2}$: $v(t) = \frac{1}{t}$: $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et u et v de classe C^1 sur $[x, M]$

$$\begin{aligned} \int_x^M t e^{-t^2/2} \frac{1}{t} dt &= \left[-e^{-t^2/2} \frac{1}{t} \right]_x^M - \int_x^M \frac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt \\ &\rightarrow \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \end{aligned}$$

(l'intégrale converge par majoration par $\varphi(t)$) et en divisant par $\sqrt{2\pi}$

$$\text{Conclusion : } 1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \quad \text{pour tout } x > 0$$

- b) On montre tout d'abord que $\int_x^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt \leq x^{-3} \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$:

sur $[x, +\infty[$: $t^{-2} = t^{-3}t \leq x^{-3}t$ car $t \rightarrow t^{-3}$ y est décroissante.

donc $t^{-2} \varphi(t) \leq x^{-3} t \varphi(t)$ (car $\varphi(t) \geq 0$)

Et $\int_x^M t^{-2} \varphi(t) dt \leq x^{-3} \int_x^M t \varphi(t) dt$ pour $M \geq x$

Et comme $\int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$ converge, par passage à la limite dans l'inégalité :

$$\text{Conclusion : } \int_x^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt \leq x^{-3} \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$$

.En multipliant par $x/\varphi(x)$ on obtient :

$$\frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} = 1 - \frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$$

d'où les deux inégalités :

$$\begin{aligned} - \frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} &\leq 1 \quad \text{car} \quad \frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \geq 0 \\ - \frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} &\geq 1 - \frac{x^{-2}}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Dans cette dernière inégalité, reste à montrer que $\frac{1}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt \leq 1$ pour tout $x > 0$

En fait, on a $\int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt = \varphi(x)$

En effet $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = -x\varphi(x)$ dérivée que l'on intègre

Donc $\int_x^M t \varphi(t) dt = \varphi(x) - \varphi(M) \rightarrow \varphi(x) = \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$ et

$$- \frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \geq 1 - x^{-2}$$

Conclusion :

$$1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1 \quad \text{pour tout } x > 0 \quad ((E))$$

- c) Comme $1 - \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors par encadrement, $\frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \rightarrow 1$ c'est à dire que

$$\text{Conclusion : } 1 - \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

0.2 Partie 2 Inégalité de transport.

d) On reprend $1 - x^{-2} \leq \frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1$

et comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, pour $x > 1$ on aura $1 - x^{-2} > 0$ et

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \ln\left(\frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)}\right) \leq 0$$

tous les termes du $\ln$ étant strictement positifs,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)}\right) &= \ln(x) + \ln(1 - \Phi(x)) - \ln(\varphi(x)) \\ &= \ln(x) - g(x) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right) \\ &= \ln(x) - g(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \ln(x) - g(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} \leq 0$$

dans laquelle on isole $g(x)$:

$$\frac{\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} - \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2/2} \geq \frac{g(x)}{x^2/2} \geq \frac{\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2}}{x^2/2}$$

après simplification par $x^2/2$, le minorant et le majorant tendent vers 1, donc, par encadrement, $\frac{g(x)}{x^2/2} \rightarrow 1$ et

$$\text{Conclusion : } \boxed{g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}}$$

0.2 Partie 2 Inégalité de transport.

On définit une application h sur $[0, +\infty[$ par : $h(t) = t \ln(t) - t + 1$ pour $t > 0$ et $h(0) = 1$.

1. h est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0^+ : $h(t) = t \ln(t) - t + 1 \rightarrow 1 = h(0)$ quand $t \rightarrow 0^+$

Donc h est continue en 0 et sur $[0, +\infty[$.

Pour déterminer son signe, on étudie ses variations :

h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(t) = 1 + \ln(t) - 1 = \ln(t)$ d'où le tableau de variations :

t	0	1	$+\infty$
$\ln(t)$	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	1 $\searrow +$	0	$\nearrow +$

et donc $h \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } h \text{ est une application continue de } [0, +\infty[\text{ vers } [0, +\infty[.}$

Sous réserve qu'elle converge, on note $K(f, \varphi)$ la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx$. On désire vérifier l'inégalité (dite de transport) suivante

$$E((X - Y)^2) \leq 2K(f, \varphi) \quad ((v))$$

0.2 Partie 2 Inégalité de transport.

2. $g(x) = -\ln(1 - \Phi(x))$ et $f(x) = e^{-x}$ pour $x > 0$ et 0 sinon.

On a vu que $1 - \Phi(x) > 0$

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{1 - \Phi(x)} (-\Phi'(x)) \\ &= \frac{\varphi(x)}{1 - \Phi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\Phi(-x)} = \frac{\varphi(-x)}{\Phi(-x)} \end{aligned}$$

Et comme $1 - \Phi(x) \in]0, 1[$ alors $\ln(1 - \Phi(x)) < 0$ et $g(x) > 0$ donc

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= e^{-g(x)} = e^{\ln(1 - \Phi(x))} \\ &= 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x réel : $g'(x) f(g(x)) = \varphi(x)$

3. L'intégrale $K(f, \varphi)$ est impropre en $\pm\infty$.

Sur $\mathbb{R}$

$$\varphi(x) h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \varphi(x) h(0) = \varphi(x) \text{ si } x \leq 0$$

L'intégrale converge donc en $-\infty$

Sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \varphi(x) h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) &= \varphi(x) h(0) = \varphi(x) \text{ si } x \leq 0 \\ \varphi(x) h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) &= \varphi(x) h\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) \\ &= e^{-x} \ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) - e^{-x} + \varphi(x) \end{aligned}$$

et en $+\infty$ les intégrales de $x \rightarrow e^{-x}$ et de $x \rightarrow \varphi(x)$ convergent.

Reste

$$e^{-x} \ln\left(\frac{e^{-x}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}\right) = e^{-x} \left(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi)\right)$$

et comme les intégrales de $x \rightarrow x^k e^{-x}$ convergent pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors

Conclusion : $K(f, \varphi)$ converge bien.

(**N.B.** j'ai mis une bonne heure de tripatouillage pour trouver la bonne idée dans ce qui suit ... à ne pas faire en temps limité!)

$$\begin{aligned} K(f, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx \text{ que l'on découpe en 0 pour } f. \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi(x) h(0) dx + \int_0^{+\infty} \left[e^{-x} \ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) - e^{-x} + \varphi(x) \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx \text{ (lois normale et exponentielle)} \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx \end{aligned}$$

0.2 Partie 2 Inégalité de transport.

que l'on transforme par le changement de variable $x = g(t)$ sur $[M, N]$ avec $M \rightarrow 0$ et $N \rightarrow +\infty$.

on se souvient que g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{-\infty} g = 0$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$

hypothèses (que l'on retrouve après avoir écrit la formule)

$x \rightarrow e^{-x} \ln \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right)$ est continue sur $g[g^{-1}(M), g^{-1}(N)]$ et g est C^1 sur $[g^{-1}(M), g^{-1}(N)]$

$$\begin{aligned} \int_M^N f(x) \ln \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right) dx &= \int_{g^{-1}(M)}^{g^{-1}(N)} f(g(t)) \ln \left(\frac{f(g(t))}{\varphi(g(t))} \right) g'(t) dt \\ &= \int_{g^{-1}(M)}^{g^{-1}(N)} \varphi(t) \ln \left(\frac{f(g(t))}{\varphi(g(t))} \right) dt \end{aligned}$$

car $g'(x) f(g(x)) = \varphi(x)$.

or quand $M \rightarrow 0$ et $N \rightarrow +\infty$ on a $g^{-1}(M) \rightarrow -\infty$ et $g^{-1}(N) \rightarrow +\infty$ et comme $K(f, \varphi)$

converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))} \right] dx$ converge et

$$\text{Conclusion : } K(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))} \right] dx$$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (x - g(x))^2 dx$ est impropre en $\pm\infty$.

– En $+\infty$: on a $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) (x - g(x))^2 &= \varphi(x) \frac{x^4}{4} \left(\frac{1}{x} - \frac{g(x)}{x^2/2} \right)^2 \\ &\sim \varphi(x) \frac{x^4}{4} \text{ quand } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

car $() \rightarrow 1$.

L'énoncé nous donne la convergence de $\int_0^{+\infty} x^4 \varphi(x) dx$

Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \varphi(x) (x - g(x))^2 dx$ converge.

– En $-\infty$: on a $\Phi(x) \rightarrow 0$ donc $g(x) = -\ln(1 - \Phi(x)) \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) (x - g(x))^2 &= \varphi(x) x^2 \left(1 - \frac{g(x)}{x} \right)^2 \\ &\sim \varphi(x) x^2 \text{ quand } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

L'énoncé nous donne la convergence de $\int_{-\infty}^0 x^2 \varphi(x) dx$

Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_{-\infty}^0 \varphi(x) (x - g(x))^2 dx$ converge.

$$\text{Conclusion : } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (x - g(x))^2 dx \text{ converge}$$

$Y = g(X)$ et donc $(X - Y)^2 = (X - g(X))^2$.

D'après le théorème de transfert (hypothèses :

- $x \rightarrow (x - g(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}$; (un nombre fini de discontinuité est permise)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (x - g(x))^2 dx$ est absolument convergente;
- X a pour densité φ donc

$$\text{Conclusion : } (X - Y)^2 \text{ a une espérance et } E((X - Y)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (x - g(x))^2 dx$$

0.2 Partie 2 Inégalité de transport.

5. L'intégrale est impropre en $\pm\infty$.

On a $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)}$

– en $+\infty$ on a $1-\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$ alors $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} \sim x$ quand $x \rightarrow +\infty$

Donc $\varphi(x)(1-g'(x)) = -x\varphi(x) \left(-\frac{1}{x} + \frac{g'(x)}{x}\right) \sim x\varphi(x)$ en $+\infty$, dont l'intégrale converge en $+\infty$

et par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x)) dx$ converge également.

– En $-\infty$: $\Phi(x) \rightarrow 0$ et $\varphi(x) \rightarrow 0$ donc $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} \rightarrow 0$ et $\varphi(x)(1-g'(x)) \sim \varphi(x)$ et par comparaison de fonctions positives, $\int_{-\infty}^0 \varphi(x)(1-g'(x)) dx$ converge également.

Conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x)) dx$ converge et est égale à $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-g(x))x\varphi(x) dx$

6. On démontre le résultat suggéré :

Soit $k(u) = u - 1 - \ln(u)$

k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $k'(u) = 1 - \frac{1}{u} = \frac{u-1}{u}$ d'où le tableau de variations :

u	0	1	$+\infty$
$u-1$	–	0	+
$k'(u)$	–	0	+
$k(u)$	$\searrow +$	0	$\nearrow +$

donc $k \geq 0$ et

Conclusion : $\ln(u) \leq u - 1$ pour tout u réel strictement positif

On utilise alors (Merci à Christophe Schneider) $g'(x)f(g(x)) = \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} K(f, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left[\frac{\varphi(x)/g'(x)}{\varphi(g(x))} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))} \right] - \varphi(x) \ln(g'(x)) dx \end{aligned}$$

car les termes du $\ln$ sont positifs.

Et comme $\ln(g'(x)) \leq g'(x) - 1$ et $-\varphi(x) \geq 0$ on a donc $-\varphi(x) \ln(g'(x)) \geq \varphi(x)(-g'(x) + 1)$ les intégrales étant convergentes,

Conclusion : $K(f, \varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln[\varphi(x)/\varphi(g(x))] dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(-g'(x) + 1)x\varphi(x) dx$

7. On transforme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x)) dx$ par intégration par parties :

Soit $u'(x) = 1 - g'(x)$: $u(x) = x - g(x)$: $v(x) = \varphi(x)$ et $v'(x) = -x\varphi(x)$ avec u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

donc

$$\begin{aligned} \int_M^N \varphi(x)(1-g'(x)) dx &= [(x-g(x))\varphi(x)]_M^N - \int_M^N -(x-g(x))x\varphi(x) dx \\ &= (N-g(N))\varphi(N) - (M-g(M))\varphi(M) \\ &\quad + \int_M^N (x-g(x))x\varphi(x) dx \end{aligned}$$

termes dont il faut déterminer les limites quand $M \rightarrow -$ et $N \rightarrow +\infty$.

Préliminaire : Comme $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ on a donc $x^n \varphi(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

(Au choix,

0.2 Partie 2 Inégalité de transport.

- on fait entrer le x dans l'exponentielle $x^n = e^{n \ln(x)}$ pour $x > 0$ et changement de variable $t = -x$ pour $x < 0$, puis on factorise dans l'exponentielle
- on fait un changement de variable $t = x^2/2$ et $x = \pm\sqrt{2t^{n/2}}$ d'où $xe^{-x^2/2} = \sqrt{2}t^{n/2}/e^t$ avec la croissance comprise $t^{n/2} = o(e^t)$

)

Et comme $g(N) \sim \frac{N^2}{2}$ on a comme précédemment $(N - g(N))\varphi(N) = \varphi(N) \frac{N^2}{2}(\dots) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$

Avec $g(M) \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow -\infty$ on a $(M - g(M))\varphi(M) = \varphi(M)M(\dots) \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow -\infty$.

Enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - g(x))x\varphi(x)dx$ converge par comparaison de fonctions positives là encore.

Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1 - g'(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - g(x))x\varphi(x)dx}$

Donc

$$K(f, \varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln[\varphi(x)/\varphi(g(x))]dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (x - g(x))x\varphi(x)dx$$

On développe

$$\ln[\varphi(x)/\varphi(g(x))] = \ln\left[\frac{e^{-x^2/2}}{e^{-g(x)^2/2}}\right] = -\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2}$$

et il reste donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2} + x^2 - xg(x) \right] dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (x^2 - 2xg(x) + g(x)^2) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (x + g(x))^2 \varphi(x) dx \\ &= E((X - Y)^2) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(X - Y)^2 \leq 2K(f, \varphi)}$