**Corrigé (CCIP 94)** par Pierre Veuillez

**Seconde méthode (poolage)** : on fixe un entier naturel non nul $\ell$. On suppose que $N$ est un multiple de $\ell$ et on pose $N = n\ell$. On répartit les $N$ prélèvements en $n$ groupes $G_1, G_2, ..., G_n$, chaque groupe $G_i$ contenant $\ell$ prélèvements. Pour chacun des groupes $G_i$ , on extrait une quantité de sang de chacun des $\ell$ prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang $H_i$, caractéristique du groupe $G_i$.
On teste alors $H_i$.
- si le test de $H_i$ est négatif, aucun des individus au sein du groupe $G_i$ n'est porteur du parasite.
Le travail sur le groupe $G_i$ est alors terminé ;
- si le test de $H_i$ est positif, on teste un à un les prélèvements de $G_i$ pour détecter les porteurs du parasite au sein du groupe $G_i$.
Soient $X$ la variable aléatoire égale au nombre de groupes $G_i$ pour lesquels le test de $H_i$ a été positif et $T$ la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode du poolage.

1. On effectue d'abord un test sur chacun des $n$ groupes ($n$ tests). Puis sur chacun des $X$ groupes positifs, on réeffectue un test sur chacun des $\ell$ induvidu ($\ell X$ tests). On en a donc fait au total: $T = n + \ell.X$

2. Les $\ell$ personnes d'un groupes sont affectées indépendemment les unes des autres avec une probabilité $p$. Donc le nombre de ceux infectés suit une loi binômiale de paramètres $\ell$ et P("le test de $H_i$est négatif") $= \binom{\ell}{0} p^0 q^\ell = q^\ell$ avec $q = 1 - p$.

3. $X$ est le nombre de groupes positif en $n$ tests indépendants. La probilité d'être positif pour chacun étant de $1 - q^\ell$. $X$ suit donc une loi binômiale de paramètres $n$ et $(1 - q^\ell)$.

   Donc $E(X) = n.\left(1 - q^\ell\right)$.

4. Comme $T = n + \ell.X$ alors $E(T) = E(n + \ell.X) = n + \ell.E(X) = n + \ell.n.\left(1 - q^\ell\right) = n\left(1 + \ell\left(1 - q^\ell\right)\right)$

   La méthode est donc avantageuse si $E(T) < N = \ell.n$ donc si $n\left(1 + \ell\left(1 - q^\ell\right)\right) < \ell.n$ ce que l'on résout:

$$\begin{aligned} \text{avantageux} &\Leftrightarrow 1 + \ell\left(1 - q^\ell\right) < \ell \Leftrightarrow 1 - \ell q^\ell < 0 \\ &\Leftrightarrow \ell q^\ell > 1 \Longleftrightarrow q^\ell > 1/\ell \Longleftrightarrow \ell \ln(q) > -\ln(\ell) \\ &\Leftrightarrow q > e^{-\frac{1}{\ell}\ln(\ell)} = 1/\ell^{1/\ell} \end{aligned}$$

   donc si la probabilité d'être épargné est suffisemment grande.

**(CCIP 94)**