Corrigé par Pierre Veuillez

Prépa ECE 1
Révisions n°1

1. On suit le contenu des deux urnes:

Dé		1	3	2	3	5
$U1$	12	2	23	3		5
$U2$	3456	13456	1456	12456	123456	12346

Donc à l'issue du cinquième tirage $U1$ contient la bouke n°5.

2. X_1 est le nombre de boule à l'issue du premier échange. Il a pu augmenter (3456) ou diminuer (12) d'un

Donc $X_1(\Omega) = \{1, 3\}$ et $p(X_1 = 1) = p(1 \cup 2) = 2/6$ par équiprobabilité des faces du dé et $p(X_1 = 3) = p(3 \cup 4 \cup 5 \cup 6) = 4/6 = 2/3$

Et $E(X_1) = 1p(X_1 = 1) + 3p(X_1 = 3) = 1/3 + 2 = 7/3$

3. **a)** $X_2(\Omega) = \{0, 2, 4\}$ car à chaque tirage, le nombre de boule augment ou diminue de 1.
$p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = p(X_1 = 1)\, p(X_2 = 0/X_1 = 1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$ car quand $(X_1 = 1)$, il y a un seul numéro présent dans $U1$. pour diminuer de 1 le contenu de $U1$
$p(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) = p(X_1 = 1)\, p(X_2 = 2/X_1 = 1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6}$ car il y a 5 numéros dans $U2$
Et de même pour les autres: $p(X_1 = i \cap X_2 = j)$ d'où les lois marginales et le calcul des espérances puis de l'espérance du produit et la covariance.

$i\backslash j$	0	2	4	$p(X_1 = i)$	$ip(X_1 = i)$
1	$2 \cdot 1/36 = 1/18$	$2 \cdot 5/36 = 5/18$	0	$6/18$	$1/3$
3	0	$4 \cdot 3/36 = 1/3$	$4 \cdot 3/36 = 1/3$	$12/18$	2
$p(X_2 = j)$	$1/18$	$11/18$	$6/18$	1	$7/3 = E(X_1)$
$j \cdot p(X_2 = j)$	0	$22/18$	$24/18$	$E(X_2) = 23/9$	

b) Enfin $E(X_1X_2) = \sum i \cdot j \cdot p(X_1 = i \cap X_2 = j) = 0 + 2 \cdot 5/18 + 6/3 + 0 + 12/3 = 59/9$
et $cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = 59/9 - 23/9 \cdot 7/3 = (177 - 161)/27 = 16/27$

4. **a)** Pour obtenir $(X_{n+1} = 0)$ on n'a pas pu gagner de boule mais seulement en perdre.
Donc $(X_{n+1} = 0) = (X_n = 1 \cap \text{ une perdue})$ donc

$$p(X_{n+1} = 0) = p(X_n = 1)\, p(\text{une perdue}/X_n = 1) = \frac{1}{6} p(X_n = 1)$$

Pour tout entier $k, 1 \leq k \leq 5$, on a pu en perdre une ou en gagner une donc
$(X_{n+1} = k) = (X_n = k - 1 \cap \text{ gagner une}) \cup (X_n = k + 1 \cap \text{ perdre une})$ et comme ils sont incompatibles

$$\begin{aligned} p(X_{n+1} = k) = p(X_n = k - 1 \cap \text{ gagner une}) + p(X_n = k + 1 \cap \text{ perdre une}) \\ = p(X_n = k - 1)\, p(\text{ gagner une}/X_n = k - 1) \\ + p(X_n = k + 1)\, p(\text{ perdre une}/X_n = k + 1) \end{aligned}$$

et quand l'urne $U1$ en contient $k - 1$, pour en gagner une il faut obtenir un des numéros de $U2$: il y en a $6 - (k - 1) = 7 - k$
Donc $p(\text{ gagner une}/X_n = k - 1) = (7 - k)/6$

Quand l'urne $U1$ en contient $k+1$, pour en perdre une il faut obtenir un de ses $k+1$ numéros. Donc $p\left(\text{ perdre une}/X_n = k+1\right) = (k+1)/6$

et finalement

$$p\left(X_{n+1} = k\right) = \frac{7-k}{6}.p(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}p(X_n = k+1)$$

et enfin

$$p(X_{n+1} = 6) = p\left(X_n = 5 \cap \text{gagner une}\right) = \frac{1}{6}.p(X_n = 5)$$

La formule générale est également valable pour $k = 6$ et $k = 0$.

b) On calcule $E(X_{n+1})$ en revenant à la définition:

$$\begin{aligned}
E\left(X_{n+1}\right) &= \sum_{k=0}^{6} k \cdot p\left(X_{n+1} = k\right) = 0 \cdot p\left(X_{n+1} = 0\right) + \sum_{k=1}^{5} k \cdot p\left(X_{n+1} = k\right) + 6 \cdot p\left(X_{n+1} = 6\right) \\
&= \sum_{k=1}^{5} k \cdot \left[\frac{7-k}{6}.p(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}p(X_n = k+1)\right] + 6 \cdot \frac{1}{6}.p(X_n = 5) \\
&= \sum_{k=1}^{5} k \cdot \frac{7-k}{6}.p(X_n = k-1) + \sum_{k=1}^{5} k \cdot \frac{k+1}{6}p(X_n = k+1) + p\left(X_n = 5\right) \\
&= \sum_{k=0}^{4} (k+1) \cdot \frac{7-(k+1)}{6}.p(X_n = k) + \sum_{k=2}^{6} (k-1) \cdot \frac{k}{6}p(X_n = k) + p\left(X_n = 5\right) \\
&= \sum_{k=0}^{6} (k+1) \cdot \frac{6-k}{6}.p(X_n = k) - 0 + \sum_{k=0}^{6} (k-1) \cdot \frac{k}{6}p(X_n = k) - 0 \\
&= \sum_{k=0}^{6} \left[(k+1) \cdot \frac{6-k}{6} + (k-1) \cdot \frac{k}{6}\right].p(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{6} \left(\frac{2}{3}k + 1\right).p(X_n = k) = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{6} k.p(X_n = k) + \sum_{k=0}^{6} p(X_n = k) \\
&= \frac{2}{3}.E(X_n) + 1
\end{aligned}$$

c) Donc $E(X_n)$ est une suite arithmético-géométrique et pour tout entier n,

$$E\left(X_n\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n a + b$$

avec a et b solutions de

$$E\left(X_1\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^1 a + b \text{ et } E\left(X_1\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 a + b$$

donc $\begin{cases} \frac{2}{3}a + b = \frac{7}{3} \\ \frac{4}{9}a + b = \frac{23}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right)a = \frac{7}{3} - \frac{23}{9} \\ \frac{2}{3}a + b = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{9}a = -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3}a + b = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

d'où pour tout enier n :

$$E\left(X_n\right) = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

(ESC 97)