ESCP 2002

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie 1 : Exemples

1. Premiers exemples

   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

   a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
   b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
   c) pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

2. Programmation

   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$.

3. Un résultat de convergence

   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

   a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.
   b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :
   $$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$
   c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   d) Soit u' la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' * v$ est convergente et de limite nulle.

Partie 2 : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

   b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.
   Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et a?

   c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b * \varepsilon$.
   En utilisant le résultat de la question 3. de la Partie 1, montrer que la suite d converge vers 0.

   d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie 3 : Application aux variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Résultats préliminaires

   On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on désigne par S leur somme.

   a) Pour tout entier naturel n, on pose: $u_n = \mathbf{P}([X = n])$ et $v_n = \mathbf{P}([Y = n])$.
   Montrer que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S = n]) = w_n$, ($w$ étant la suite définie à partir des suites u et v en tête du problème).

   b) Retrouver alors le résultat de la question 1.c) de la Partie 1 par un choix adéquat des lois de X et de Y.

   c) Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note 2^{-Z} la variable aléatoire prenant, pour tout entier naturel n, la valeur 2^{-n} si et seulement si l'événement $[Z = n]$ est réalisé. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance donnée par :

   $$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}([Z = n])\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   On note $r(Z)$ cette espérance.

   d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y} ?
   En déduire l'égalité: $r(S) = r(X)\,r(Y)$.

   e) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par : $S_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_i$. Établir l'égalité : $r(S_q) = (r(X_1))^q$.

2. Une formule sommatoire

   a) Montrer que les égalités : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Z=n]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

   b) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable:
   $$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i$$
   En admettant, pour tout entier naturel non nul q, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{k+q}^{q} = C_{n+q+1}^{q+1}$, montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S_q=n]) = C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

   c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}$$

3. Un exemple concret

   On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie à la question 2.a) représente le nombre de petits devant naître en 2003 d'un couple de kangourous. Chaque petit kangourou a la même probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2003.

   a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z=n]$.

   b) À l'aide de la formule obtenue en 2c, montrer que la loi de F est donnée par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([F=n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

   c) Justifier l'existence des espérances $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{E}(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité : $\mathrm{E}(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.