Maths Ecricome mai 2000
Voie Economique

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé. On note f une densité de X, F sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes:

1. (a) i. Si t appartient à $]-\infty, 0[$, $f(t) = 0$.
   ii. Si t appartient à $[0, +\infty[$, $f(t)$ est strictement positif.
   iii. f est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$.
   Cet unique réel, que l'on notera m, sera appelé **médiane** de X.

3. Dans cette question, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   Montrer que X satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de X.

4. On suppose dans cette question que la densité de X est donnée sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t\,e^{-t}$ et sur $]-\infty, 0[$ par $f(t) = 0$.

   (a) Vérifier que f satisfait aux hypothèses du début de l'exercice.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) Montrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie $1 \leq m \leq 2$.
   (On donne $6 < e^2 < 9$).
   On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m. On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1, 2]$ par $g(x) = \ln(2x + 2)$, fonction qui va permettre de construire une suite convergeant vers m.

   (d) Montrer que $g(m) = m$.

   (e) Montrer que si x appartient à $[1, 2]$ alors $g(x)$ appartient à $[1, 2]$ et
   $$|g(x) - m| \leq \frac{1}{2}|x - m|$$

   (f) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n > 0$ par $u_n = g(u_{n-1})$.
   Montrer que $|u_n - m| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(g) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

5. On revient maintenant au cas général et on suppose que la variable X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. On note toujours m la médiane de X.

   (a) Montrer qu'on a les inégalités :

   $$V(X) \geq \int_0^m (t - E(X))^2 \, f(t) \, dt \qquad \text{et} \qquad V(X) \geq \int_m^{+\infty} (t - E(X))^2 \, f(t) \, dt$$

   (b) En distinguant les cas $m \leq E(X)$ et $m > E(X)$, montrer que:

   $$|m - E(X)| \leq \sqrt{2V(X)}$$

Exercice 2

E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(P)(x) = P(x+1) + P(x)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) On nore $\mathcal{B}$ la base usuelle de E constituée, dans cet ordre des quatre polynômes 1, X, X^2, X^3.

Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) Montrer que f est bijectif.

4) Calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

5) Soit P un élément de E défini par : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

a: Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 le polynôme $Q = f^{-1}(P)$.

b: On considère pour tout entier strictement positif n la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k P(k)$$

Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n$, $Q(n+1)$ et $Q(1)$.

c: Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2, a_3

Exercice 3

T est l'ensemble des couples (x, y) de réels solutions du système d'inéquations

$$x \geq \frac{1}{4} \quad y \geq \frac{1}{4} \quad x + y \leq \frac{3}{4}$$

On note T' l' "intérieur" de T à savoir l'ensemble des couples (x, y) solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4}$$

Soit f la fonction définie sur T par : $\quad f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x + y}$

1. Représenter sur un même graphique T et T'.
2. On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Sut T' on a $x + y \geq \frac{1}{2}$ donc f est de calsse C^2 sur T' (car $x \neq 0 : y \neq 0$ et $x + y \neq 0$)

   $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x + y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{1}{y^2} + \frac{2}{(x + y)^2} \end{aligned}$$

   (b) Sur l'ouvert T', **si** f a un extremum en (x, y) alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ donc $\begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{2}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{2}{(x+y)^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2y^2 = (x + y)^2 \end{cases}$ d'où $x = y$ car $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   Alors $2y^2 = (2y)^2$ et $y = 0$ ce qui est impossible sur T'
   Donc f n'a pas d'extremum local sur T'.

3. Il faut à la fois minorer et majorer :

   Sur le graphe de T' on **voit** que $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{4}$.

   On le **prouve :**

   $x \geq \frac{1}{4}$ et $y \geq \frac{1}{4}$ donc $x + y \geq \frac{1}{2}$

   $x + y \leq \frac{3}{4}$ donc $x \leq \frac{3}{4} - y$; et comme $y \geq \frac{1}{4}$ alors $-y \leq -\frac{1}{4}$ et $x \leq \frac{1}{2}$ et de même pour y.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \leq x+y \leq \frac{3}{4}}$

$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}$

On enchaine les déductions pour arriver à l'expressoin de f :

$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ donc $2 \leq \frac{1}{x} \leq 4$ car la fonction $x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

$\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$ donc $2 \leq \frac{1}{y} \leq 4$.

$\frac{1}{2} \leq x+y \leq \frac{3}{4}$ donc $\frac{8}{3} \leq \frac{2}{x+y} \leq 4$ et $-4 \leq -\frac{2}{x+y} \leq -\frac{8}{3}$

D'où $2+2-4 \leq f(x,y) \leq 4+4-\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

Les "simples considérations" donnent le résultat escompté à droite, mais pas à gauche.

Il faut donc être moins simple : on réduit les fractions.

$f(x,y) = \dfrac{y(x+y) + x(x+y) - 2xy}{xy\,(x+y)} = \dfrac{y^2+x^2}{xy\,(x+y)}$

Avec $x^2 \geq \frac{1}{16}$ et $y^2 \geq \frac{1}{16}$ d'où $x^2+y^2 \geq \frac{1}{8}$

$xy(x+y) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ (produit d'inégalité à termes positifs !) donc $\frac{1}{xy(x+y)} \geq \frac{3}{16}$

et $f(x,y) \geq \frac{1}{8}\frac{3}{16}$ ce qui ne convient toujours pas !

On en revient à une résolution classique :

$$\begin{aligned} f(x,y) \geq 2 &\iff \frac{y^2+x^2}{xy\,(x+y)} \geq 2 \\ &\iff y^2+x^2 \geq 2xy\,(x+y) \\ &\iff y^2(1-2x) + x^2(1-2y) \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui est vrai car $y \leq \frac{1}{2}$ et $x \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } (x,y) \text{ de } T \text{ on a } 2 \leq f(x,y) \leq \frac{16}{3}}$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).

On suppose que $\quad p \geq \dfrac{1}{4} \quad r \geq \dfrac{1}{4} \quad u \geq \dfrac{1}{4} \quad$ et que $\quad p+r+u = 1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).
On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

4. X est le rang d'apparition de la première blanche dans une suite de tirage indépebndants ayant tous la même probabiltié p de donner blanc.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et de même $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(r)$

5. "La première" signifie que l'on en a une à un tirage et pas avant

- Si $i = j$,$(X = i) \cap (Y = j)$ est impossible et $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = 0$
- Si $i < j$ alors on a d'abord la première blanche et ensuite seulement la rouge :
$(X = i) \cap (Y = j) = V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} \cap B_i \cap \overline{R_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{R_{j-1}} \cap R_j$
Et comme les tirages sont indépendant :

$$\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = \mathrm{P}(V_1) \ldots \mathrm{P}(V_{i-1})\, \mathrm{P}(B_i)\, \mathrm{P}\left(\overline{R_{i+1}}\right) \ldots \mathrm{P}\left(\overline{R_{j-1}}\right) \mathrm{P}(R_j)$$

où il faut bien compter les occurences :
de 1 à $i - 1$: $i - 1$ trerme
de $i + 1$ à $j - 1$: $j - 1 - (i + 1) + 1 = j - i - 1$ termes
(vérification au total : $i - 1 + 1 + j - i - 1 + 1 = j$)
D'où $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = u^{i-1} p (1 - r)^{j-i-1} r$
- Et en inversant les roles de blanc et rouge (donc de p et r et de i et j)
si $i > j$, $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = u^{j-1} r (1 - p)^{i-j-1} p$
La loi du couple est donc donnée par : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- Si $i = j$: $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = 0$
- Si $i < j$: $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = u^{i-1} p (1 - r)^{j-i-1} r$
- Si $i > j$: $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = u^{j-1} r (1 - p)^{i-j-1} p$

6. X et Y sont indépendante sir, **pour tout** (i, j) : $\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) = \mathrm{P}(X = i)\, \mathrm{P}(Y = j)$

Pour monterr qu'elles ne le sont pas, il suffit de trouver **un** contre exemple :

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathrm{P}(X = 1 \cap Y = 1) = 0 \neq \mathrm{P}(X = 1)\, \mathrm{P}(Y = 1)$

7. On décompose l'événement avec les trems de la loi du couples :

$$\begin{aligned} (D = k) &= (|X - Y| = k) \\ &= (X - Y = k) \cup (X - Y = -k) \end{aligned}$$

car $k \geq 0$

$$(X - Y = k) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (Y = j) \cap (X = j + k)$$

Les événements étant incompatibles (valeurs de Y toutes distinctes) mais X et Y pas indépendantes (ici $j + k \geq j$)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X - Y = k) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = j + k \cap Y = j) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} u^{j-1} r (1-p)^{j+k-j-1} p \\ &= \frac{r\,p}{u} (1-p)^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u^j - 1 \right) \\ &= \frac{r\,p}{u} (1-p)^{k-1} \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) \\ &= \frac{r\,p}{1-u} (1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

et de même en inversant les rôles de blanc et rouge :

$$\mathrm{P}(Y - X = k) = \frac{r\,p}{1-u} (1-r)^{k-1}$$

Comme $p + r + u = 1$ on a $1 - u = p + r$ et donc (incompatibles)

$$P(D = k) = \frac{pr}{p+r} \left[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1} \right]$$

8. D a une espérance si la série $\sum_{k \geq 1} k\,\mathrm{P}(D = k)$ est absolument convergente. ($\Longleftrightarrow$ convergente car tous les termes sont positifs)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\,\mathrm{P}\left(D=k\right) &= \sum_{k=1}^{N} k\frac{pr}{p+r}\left[(1-p)^{k-1}+(1-r)^{k-1}\right] \\
&= \frac{pr}{p+r}\left(\sum_{k=1}^{N} k(1-p)^{k-1}+\sum_{k=1}^{N} k(1-r)^{k-1}\right) \\
&= \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{1-p}\sum_{k=0}^{N} k(1-p)^{k}-0+\frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{N} k(1-r)^{k}-0\right) \\
&\to \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{1-p}\frac{1-p}{\left[1-(1-p)\right]^2}+\frac{1}{1-r}\frac{1-r}{\left[1-(1-r)\right]^2}\right) \\
&= \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \frac{p^2+r^2}{(p+r)\,p\,r}
\end{aligned}$$

Donc D a une espérance et $E\left(D\right)=\frac{p^2+r^2}{(p+r)p\,r}=f\left(p,r\right)$

Comme $p\geq\frac{1}{4}$ et $r\geq\frac{1}{4}$ et $p+r=1-u\leq\frac{3}{4}$ (car $u\geq\frac{1}{4}$) alors $(p,r)\in T$ et

Conclusion : $\boxed{2\leq E\left(D\right)\leq\frac{16}{3}}$