Corrigé ECRICOME 2001 Par Pierre Veuillez

1. EXERCICE.

Dans cet exercice on étudie l'évolution au cours du temps d'un titre dans une bourse de valeurs.

1.1. Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice:

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. On calcule de chaque côté :

$$\begin{aligned} M(a)\,M(b) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+6ab & b-3ab+a & b-3ab+a \\ b-3ab+a & 1-2b-2a+6ab & b-3ab+a \\ b-3ab+a & b-3ab+a & 1-2b-2a+6ab \end{pmatrix} \\ &= M(a+b-3ab) \end{aligned}$$

2. Pour l'inversibilité, on pense à $A\,B = I$...
   Si on a $M(a+b-3ab) = I$, on aura l'inversibilité de $M(a)$. Or ceci est vrai pour $a+b-3ab = 0$
   On cherche pour quelles valeurs de a on a peut trouver b tel que $a+b-3ab = 0 \iff b(1-3a) = -a$
   Donc **si** $a \neq 1/3$ alors avec $b = \frac{a}{3a-1}$ on a $M(a)\,M(b) = M(0) = I$ et $M(a)$ est alors inversible d'inverse $M(a)^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$
   Reste à examiner le cas $a = \frac{1}{3}$:
   $M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et comme les colonnes sont liées, la matrice n'est pas inversibles.
   Conclusion : $\boxed{M(a) \text{ est inversible uniquement pour } a \neq 1/3}$
3. La matrice $M(a)$ étant symétrique, elle est diagonalisable.
4. Soit $a \neq 0$
   On n'oublie pas qu'un carré est un produit : $M(a)^2 = M(a)\,M(a) = M(2a-3a^2)$
   Donc $M(a)^2 = M(a) \iff M(2a-3a^2) = M(a) \iff 2a-3a^2 = a$ par identification des coefficients
   On résout : $2a-3a^2 = a \iff a-3a^2 = 0 \iff a(1-3a) = 0 \iff a = 1/3$ puisque l'on cherche $a \neq 0$
   Donc $a_0 = 1/3$ est l'unique réel vérifiant $M(a_0)^2 = M(a_0)$
5. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.

On a donc $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Pour montrer l'existence de α, on peut le chercher au brouillon et le donner :

Au brouillon : $M(a) = P + \alpha Q$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 1-2a = \frac{1+2\alpha}{3} \\ a = \frac{1-\alpha}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1-3a \\ 0 = 0 \end{cases}$$

rédaction : soit $\alpha = 1-3a$ on a

$$P + \alpha Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (1-3a)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = M(a)$$

Ou bien on rédige directement la recherche par équivalence. (seule la réciproque est en fait utile)

b) $P^2 = M(a_0)^2 = M(a_0) = P$

$QP = (I-P)P = P - P^2 = P - P = 0$

$P(I-P) = 0,$

$Q^2 = (I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P = Q$

c) On peut procéder par récurrence **ou utiliser la formule du binôme** (plus technique !)

Comme $PQ = QP$ alors $[M(a)]^n = [P + \alpha Q] = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} P^k \alpha^{n-k} Q^{n-k}$

Or $P^k = P$ si $k \geq 1$ et $Q^{n-k} = Q$ si $n-k \geq 1 \iff k \leq n-1$ et on découpe donc la somme :

$$\begin{aligned} [M(a)]^n &= [P + \alpha Q] = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} P^k \alpha^{n-k} Q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \alpha^{n-k} PQ + \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} P^0 \alpha^n Q + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} P\alpha^{n-k} Q^0 \\ &= 0 + \alpha^n Q + P \\ &= \alpha^n Q + P \end{aligned}$$

N.B. le découpage de la somme n'est valable que pour $n \geq 2$

Reste à voire pour $n = 0$ et $n = 1$: $M(a)^0 = I = Q + P$ (ce qui est la formule précédente pour $n = 0$)

Et pour $n = 1$ on a $M(a) = P + \alpha Q$ (ce qui est encore la formule précédente pour $n = 1$)

Donc partout entier n : $M(a)^n = \alpha^n Q + P$ est bien comme combinaison linéaire de Q et P

Ou par récurrence

- Pour $n = 1$, $\quad [M(a)]^1 = M(a) = P + \alpha Q$ donc $x_1 = 1$ et $y_1 = \alpha$ conviennent (cela était déjà vrai pour $n = 0$ mais l'énoncé ne le demandait qu'à partir de 0)
- Soit $n \geq 1$ tel qu'il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$ avec x_n et y_n réels alors $[M(a)]^{n+1} = (x_n P + y_n Q)(P + \alpha Q) = x_n P^2 + y_n QP + \alpha x_n PQ + \alpha y_n Q^2 = x_n P + \alpha y_n Q$

  Donc avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$ qui sont bien des réels, on a $[M(a)]^{n+1} = x_{n+1} P + y_{n+1} Q$

– Donc pour tout entier n on a $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$ combinaison linéaire de P et de Q
avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$

d) Si on a utilisé le binôme, on n'a plus rien à faire : $M(a)^n = \alpha^n Q + P$
Pour la récurrence : la suite x est constante donc $x_n = x_1 = 1$ et y est géométrique de raison α donc $y_n = \alpha^{n-1} y_1 = \alpha^n$
Donc pour tout entier $n \geq 1$, $\quad [M(a)]^n = P + \alpha^n Q$

1.2. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

a) Comme $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a alors pour tout entier n,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = [M(a)]^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = [\alpha^{n-1} Q + P] \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$$

b) On a $\alpha = 1 - 3a$ et comme $0 < a < 2/3$ alors $0 > -3a > -2$ et $1 > 1 - 3a > -1 <$ donc $|\alpha| < 1$ donc $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Donc $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\to} P \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(p_1 + q_1 + r_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. **a)** (M_n, S_n, B_n) formant un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p(M_{n+1}) &= p(M_{n+1}/M_n)\,p(M_n) + p(M_{n+1}/S_n)\,p(S_n) + p(M_{n+1}/B_n)\,p(B_n) \\ &= \frac{2}{3}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned} p(S_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{2}{3}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \\ p(B_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{2}{3}p(B_n) \end{aligned}$$

b) On retrouve les relations de récurrence précédentes avec $p_n = p(M_n)$, $q_n = p(S_n)$ et $r_n = p(B_n)$ et $a = 1/6 \in]0, 2/3[$ et $\alpha = 1 - 3/6 = 1/2 < 2/3$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(M_n) \\ p(S_n) \\ p(B_n) \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2^{n-1}} Q + P\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - 1/2^{n-1} \\ 1 + 2/2^{n-1} \\ 1 - 1/2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $p(M_n) = p(B_n) = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ et $p(S_n) = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

c) Et quand n tend vers $+\infty$ ces trois probabilités tendent vers $1/3$ car $a < 2/3$ (car $p_1 + q_1 + r_1 = 1$ SCE)

2. EXERCICE.

Un système est constitué de n composants. On suppose que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ mesurant le temps de bon fonctionnement de chacun des n composants sont indépendantes, de même loi, la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2.1. Calcul du nombre moyen de composants défaillants entre les instants 0 et t.

On note N_t la variable aléatoire égale au nombre de composants défaillants entre les instants 0 et t avec $t \geqslant 0$.

1. Pour tous les entiers i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_i \leq t) &= \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-t}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_i \leq t) = 1 - e^{-t} \text{ pour tout } t \geq 0}$

2. La probabilité de défaillir entre 0 et t est donc $\mathrm{P}(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

N_t est le **nombre de** composants défaillants parmi n, **indépendamment**les nus des autres, entre les instants 0 et t, avec pour chacun une probabilité $1 - e^{-\lambda t}$

Conclusion : $\boxed{N_t \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; 1 - e^{-\lambda t}\right) \text{ et } E(N_t) = n\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$

3. Le nombre moyen de composants défaillants est $E(N_t)$.

On résout donc

$$\begin{aligned}
E(N_t) &> \frac{n}{2} \\
&\Longleftrightarrow n\left(1 - e^{-\lambda t}\right) > \frac{n}{2} \\
&\Longleftrightarrow e^{-\lambda t} < \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow -\lambda t < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\Longleftrightarrow t > \frac{1}{\lambda}\ln(2)
\end{aligned}$$

Et le nombre moyen de composants défaillants dépasse-t-il la moitié du nombre de composants à partir de $t_0 = \frac{1}{\lambda}\ln(2)$

Conclusion : $\boxed{t_0 = \frac{1}{\lambda}\ln(2)}$

2.2. Montage en série.

On suppose que le système fonctionne correctement si tous les composants eux-mêmes fonctionnent correctement et note S_n la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1. $(S_n > t)$ signifie que le système fonctionne correctement plus de t.
   C'est à dire que tous les composants fonctionnent correctement plus de t.
   Conclusion : $\boxed{(S_n > t) = \bigcap_{i=1}^{n} (T_i > t)}$
2. Avec $\mathrm{P}(T_i > t) = 1 - \mathrm{P}(T_i \leq t) = e^{-\lambda t}$ et comme les composants sont indépendants,
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_n > t) &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda t} = e^{-n\lambda t} \end{aligned}$$
   On a alors $\mathrm{P}(S_n \leq t) = 1 - \mathrm{P}(S_n > t) = 1 - e^{-\lambda n t}$ pour tout $t \geq 0$
   Donc la fonction de répartition de S_n est F_n : $F_n(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda n t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$
3. Cette fonction de répartition est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, ainsi qu'en 0^- ($F_n(t) = 0 \to 0 = F_n(0)$ quand $t \to 0^-$)
   et elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
   Donc S_n est à densité et a pour densité : $f_n(t) = F_n{}'(t) \begin{cases} \lambda n e^{-\lambda n t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ (valeur en 0 arbitraire)
   Donc S_n suit une loi exponentielle de paramètre λn
   Conclusion : $\boxed{S_n \hookrightarrow \varepsilon(\lambda n) : E(S_n) = \frac{1}{\lambda n} \text{ et } V(S_n) = \frac{1}{\lambda^2 n^2}}$

2.3. Montage en parallèle.

On suppose maintenant que le système fonctionne correctement si l'un au moins des composants fonctionne correctement et note U_n la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1. $(U_n < t)$ signifie que le système est en panne à l'instant t.
   Donc, que tous les composants sont défaillants à cet instant.
   Donc
$$(U_n < t) = \bigcap_{i=1}^{n} (T_i < t)$$
2. et par indépendance, on a donc la fonction de répartition de U_n qui est :
$$\begin{aligned} G_n(t) &= \mathrm{P}(U_n \leq t) = \mathrm{P}(U_n < t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i < t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n \end{aligned}$$
   si $t \geq 0$ et $\mathrm{P}(U_n < t) = 0$ si $t < 0$
   Comme précédemment, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (y compris en 0 par passage à la limite)
   et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$
   Donc U_n est à densité et sa densité est $g_n(t) = G_n'(t)$ donc
$$\begin{array}{ll} g_n(t) = n\lambda \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1} e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geqslant 0 \\ g_n(t) = 0, & \text{si } t < 0 \end{array}$$

3. Pour voire l'espérance sous forme de somme, il faut développer la densité de U_n elle même sous forme de somme :

$$\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k e^{-k\lambda t}$$

ne fait pas apparaître le bon coefficient du binôme.

a) Néanmoins, on peut espérer transformer a posteriori le coefficient
Donc, sous réserve de convergence :

$$E\left(U_n\right)=\int_{-\infty}^{0}0+\int_{0}^{+\infty}t\sum_{k=0}^{n-1}n\lambda\left(-1\right)^k\binom{n-1}{k}e^{-k\lambda t}e^{-\lambda t}dt$$

On étudie séparément chaque intégrale de la somme :

$$\int_0^M te^{-k\lambda t}e^{-\lambda t}dt=\int_0^M te^{-(k+1)\lambda t}dt$$

que l'on intègre par parties avec :
$u\left(t\right)=t$: $u'\left(t\right)=1$: $v'\left(t\right)=e^{-(k+1)\lambda t}$: $v\left(t\right)=\frac{-1}{(k+1)\lambda}e^{-(k+1)\lambda t}$ et comme u et v sont C^1 :

$$\begin{aligned}\int_0^M te^{-k\lambda t}e^{-\lambda t}dt &= \left[t\frac{-1}{\left(k+1\right)\lambda}e^{-(k+1)\lambda t}\right]_0^M-\int_0^M\frac{-1}{\left(k+1\right)\lambda}e^{-(k+1)\lambda t}dt\\ &= \frac{-1}{\left(k+1\right)\lambda}Me^{-(k+1)\lambda M}-\left[\frac{1}{\left(k+1\right)^2\lambda^2}e^{-(k+1)\lambda t}\right]_0^M\\ &= \frac{-1}{\left(k+1\right)\lambda}Me^{-(k+1)\lambda M}-\frac{1}{\left(k+1\right)^2\lambda^2}e^{-(k+1)\lambda M}+\frac{1}{\left(k+1\right)^2\lambda^2}\\ &\to \frac{1}{\left(k+1\right)^2\lambda^2}\text{ quand }M\to+\infty\end{aligned}$$

Donc U_n a une espérance et

$$\begin{aligned}E\left(U_n\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}n\lambda\binom{n-1}{k}\frac{\left(-1\right)^k}{\left(k+1\right)^2\lambda^2}\\ &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n\binom{n-1}{k}}{k+1}\frac{\left(-1\right)^k}{k+1}\end{aligned}$$

Il reste à transformer l'écriture

$$\begin{aligned}\frac{n\binom{n-1}{k}}{k+1} &= \frac{n\left(n-1\right)!}{\left(k+1\right)k!\left(n-1-k\right)!}\\ &= \frac{n!}{\left(k+1\right)!\left(n-\left(k+1\right)\right)!}\\ &= \binom{n}{k+1}\end{aligned}$$

pour obtenir que

Conclusion : $\boxed{E(U_n)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}}$

b) Mais il est plus simple de transformer le contenu de l'intégrale pour faire apparaître une puissance n.

C'est l'intégration par parties qui permet de le faire.

$\int_0^M t\cdot n\lambda\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{n-1}e^{-\lambda t}dt=\ldots$

$u'(t)=n\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{n-1}$ et $u(t)=\left(1-e^{-\lambda t}\right)^n$.

On a pris le bloc $n\lambda e^{-\lambda t}$ pour avoir la dérivée du contenu.

$v(t)=t$ et $v'(t)=1$

u et v sont de classe C^1 donc

$$\begin{aligned}\int_0^M t\cdot n\lambda\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{n-1}e^{-\lambda t}dt &= \left[t\cdot\left(1-e^{-\lambda t}\right)^n\right]_{t=0}^M-\int_0^M\left(1-e^{-\lambda t}\right)^n dt\\ &= M\cdot\left(1-e^{-\lambda M}\right)^n-\int_0^M\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left(-e^{-\lambda t}\right)^k dt\end{aligned}$$

Problème ... quand $M\to+\infty$: $M\cdot\left(1-e^{-\lambda M}\right)^n\to+\infty$

Il faut espérer que la seconde somme va simplifier cela.

$$\begin{aligned}\int_0^M\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left(-e^{-\lambda t}\right)^k dt &= \sum_{k=1}^n\binom{n}{k}(-1)^k\left[\frac{-1}{\lambda k}e^{-\lambda tk}\right]_{t=0}^M+\binom{n}{0}[t]_0^M\\ &= \sum_{k=1}^n\binom{n}{k}(-1)^k\left[\frac{-1}{\lambda k}e^{-\lambda kM}+\frac{1}{\lambda k}\right]+M\end{aligned}$$

le M permettant de simplifier avec la première partie :

$$\begin{aligned}M\cdot\left(1-e^{-\lambda M}\right)^n &= M\cdot\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left(-e^{-\lambda M}\right)^k\\ &= M+\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}Me^{-\lambda kM}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^M t\cdot n\lambda\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{n-1}e^{-\lambda t}dt &= M+\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}Me^{-\lambda kM}\\ &\quad-\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{\lambda k}+\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}(-1)^k\frac{-1}{\lambda k}e^{-\lambda kM}-M\end{aligned}$$

et le M et $-M$ se simplifient (ouf)

reste à passer à la limite sur les termes restants :

$Me^{-\lambda kM}=M/e^{\lambda lkM}\to 0$ car $M=o\left(\left(e^{\lambda lk}\right)^M\right)$ quand $M\to+\infty$

et $e^{-\lambda kM}\to 0$

Donc

$$\int_0^M\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow}-\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{\lambda k}$$

Donc U_n a une espérance et

$$\begin{aligned}
E\left(U_n\right) &= -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{\lambda k} \text{ réindexé } h=k-1 \\
&= -\sum_{h=0}^{n-1}\binom{n}{h+1}(-1)^{h+1}\frac{1}{\lambda(h+1)} \\
&= \sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\frac{1}{\lambda(h+1)}\binom{n}{h+1}
\end{aligned}$$

c) On a alors pour tous entiers naturels n,

$$\begin{aligned}
E(U_{n+1})-E(U_n) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n+1}{k+1}-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1} \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\left[\binom{n+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}\right]+\frac{1}{\lambda}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n+1}{n+1}
\end{aligned}$$

on reconnaît dans [] la formule du triangle de Pascal

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$$

donc

$$E(U_{n+1})-E(U_n)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}+\frac{1}{\lambda}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

on retransforme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)\,k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))\,(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{k+1}\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(U_{n+1})-E(U_n) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{n+1}\binom{n+1}{k+1}+\frac{1}{\lambda}\frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \frac{1}{\lambda(n+1)}\sum_{h=1}^{n}(-1)^{h+1}\binom{n+1}{h}+\frac{1}{\lambda}\frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= -\frac{1}{\lambda(n+1)}\left[\sum_{h=0}^{n+1}(-1)^h\binom{n+1}{h}-1-(-1)^{n+1}\right]+\frac{1}{\lambda}\frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= -\frac{1}{\lambda(n+1)}\left[(-1+1)^{n+1}-1-(-1)^{n+1}\right]+\frac{1}{\lambda}\frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \frac{1}{\lambda(n+1)}
\end{aligned}$$

d) Comme on a $\sum_{k=1}^{n-1} E(U_{k+1}) - E(U_k) = E(U_n) - E(U_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda(k+1)}$ alors

$$\begin{aligned} E(U_n) &= E(U_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda(k+1)} = E(U_1) + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{\ln(n)}{\lambda}\left[\frac{\lambda E(U_1)}{\ln(n)} + \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right] \\ &\sim \frac{\ln(n)}{\lambda} \end{aligned}$$

Donc le gain moyen de temps de fonctionnement en passant de n à $n+1$ est de l'ordre de $\frac{\ln(n)}{\lambda}$

3. EXERCICE.

On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.
On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n)\ :\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+2n} = a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - a$$

1. Étude d'un cas particulier.

Pour cette question seulement, on prend $a = \dfrac{11}{6}$ et $n = 1$.

a) On a

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

f_1 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0, -1, -2\}$ et

$$f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0$$

f_1 est donc strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Elle a pour limite $\pm\infty$ aux bornes finies et 0 en $\pm\infty$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{11}{6}$	$\searrow$	0

On tracera uniquement les asymptotes horizontales et verticales et la courbe représentative.

Comme la question suivante le demande, on calcule $f_1(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \simeq 1,8$ et $f'(1) = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = -\frac{43}{36} \simeq -1,3$.

Ce sera le seul point placé, avec sa tangente.

b) $f_1(1) = \frac{11}{6}$ donc $f_1(x) = \frac{11}{6}$ a déjà pour solution la valeur 1 (il peut y en avoir d'autres)
Comme on doit **déterminer** les racines, le théorème de bijection ne convient pas.
On réduit donc au même dénominateur :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{11}{6} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{11}{6} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{11x^3 + 15x^2 - 14x - 12}{x(x+1)(x+2)} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 11x^3 + 15x^2 - 14x - 12 = 0 \end{aligned}$$

$15x^2 - 14x - 12 + 11x^3 = (x-1)(11x^2 + 26x + 12)$,
Pour factoriser le numérateur, comme 1 est racine, on applique l'algorithme de Horner :

11	15	-14	-12
	11	12	12
11	26	12	0

et on a donc $11x^3 + 15x^2 - 14x - 12 = (x-1)(11x^2 + 26x + 12)$

Le polynôme du second degré $11x^2 + 26x + 12$ a pour discriminant :
$\Delta = 26^2 - 4 \cdot 12 \cdot 11 = 4(169 - 132) = 4 \cdot 37$
et a pour racines : $-\frac{13}{11} + \frac{-26 + 2\sqrt{37}}{2 \cdot 11} = \frac{-13 + \sqrt{37}}{11}$ et $\frac{-13 - \sqrt{37}}{11}$.
On a donc pour racines de (E_1) : 1 et les deux racines précédentes.

2. Dénombrement des racines de (E_n).

a) On a comme précédemment $f_n' < 0$ sur $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, \ldots, -2n\}$ donc

x	$-\infty$		$-2n$		$-2n-1$	$\ldots$	-1		0		$+\infty$
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ||	$\ldots$	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

b) Comme $f_n < 0$ sur $]-\infty, -2n[$, l'équation n'y a pas de racine.
Sur les autres intervalles, on utilise cette fois le théorème de bijection :
pour tout i de $\{-2n, -2n-1, \ldots, -2, -1\}$ f_n est continue et strictement décroissante sur $]i, i+1[$.
Elle est donc bijective de $]i, i+1[$ dans $\left]\lim_{i+1^-} f_n, \lim_{i^+} f_n\right[= \mathbb{R}$.
Or $a \in \mathbb{R}$ donc (E_n) a une unique solution sur chacun de ces intervalles : soit 2n solution.
Elle en a une également sur $]0, +\infty[$ car $a > 0$
(E_n) a donc $2n+1$ au total (ce qui est cohérent avec le résultat trouvé pour $n = 1$)

3. Équivalent de la plus grande des racines quand n tend vers $+\infty$.

On note x_n la plus grande des racines de (E_n).

a) Comme (E_n) a une unique racine strictement positive, toutes les autres sont plus petites.
La plus grande est donc celle ci et $x_n > 0$.

b) On ne peut pas utiliser ici l'inégalité des accroissements finis (minorant de $\ln'$ sur $[x, x+1] \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq$majorant de $\ln'$) qui ne nous donne qu'un inégalité large.
On reprend donc séparément les variations de la différence pour $x > 1$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x-1)$$

(N.B. on peut décomposer le ln car $x>0$ et $x+1>0$)
f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2(x-1)}>0$$

donc f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$
En $+\infty$: $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-1/x}\to 1$ et $\ln\frac{x}{x-1}\to 0$ donc $f(x)\to 0$. Donc $f<0$ sur $]1,+\infty[$
d'où $\frac{1}{x}<\ln\frac{x}{x-1}$

$$g(x)=\ln\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\ln x-\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}$$

g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x(x-1)^2}>0$$

et g est strictement croissante sur $]1,+\infty[$
En $+\infty$: $g(x)\to 0$. Donc $g<0$ sur $]1,+\infty[$ d'où $\frac{1}{x}<\ln\frac{x}{x-1}$
Et finalement pur tout $x>1$:

$$\frac{1}{x}<\ln\frac{x}{x-1}<\frac{1}{x-1}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{x+k}-a\\
f_n(x)-\frac{1}{x}+a &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x+k}\\
f_n(x)-\frac{1}{x+2n}+a &= \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{x+k}
\end{aligned}$$

On a alors en sommant les inégalités en substituant $x+k>0$ à x

$$\begin{array}{lcl}
\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x+k}< & \sum_{k=1}^{2n}\ln\frac{x+k}{x+k-1} & <\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x+k-1} \text{ réindexé par } h=k-1\\
\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x+k}< & \sum_{k=1}^{2n}\ln(x+k)-\sum_{k=1}^{2n}\ln(x+k-1) & <\sum_{h=0}^{2n-1}\frac{1}{x+k}\\
\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x+k}< & \ln(x+2n)-\ln(x) & <\sum_{h=0}^{2n-1}\frac{1}{x+k}
\end{array}$$

en réindexant puis en simplifiant .Soit finalement le résultat recherché pour x réel strictement positif :

$$f_n(x)-\frac{1}{x}+a<\ln\left(1+\frac{2n}{x}\right)<f_n(x)-\frac{1}{x+2n}+a$$

Comme $f_n(x_n)=0$ (car x_n est solution de l'équation E_n) et que $x_n>0$ on a en particulier

$$a-\frac{1}{x_n}<\ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right)<a-\frac{1}{x_n+2n}$$

d) On ne réutilise que l'inégalité de droite :

$$\ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n+2n} < a$$

On fait disparaître le ln en prenant l'image par exp qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1+\frac{2n}{x_n} &< \exp(a) \\ \text{donc } \frac{2n}{x_n} &< \exp(a)-1 \end{aligned}$$

et comme $\exp(a) > 1$ (car $a > 0$) et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$x_n > \frac{2n}{\exp(a)-1}$$

N.B. pour savoir laquelle des deux inégalités utiliser, on commence avec les deux au brouillon et on regarde à la fin laquelleétait utile.

e) Comme $2n \to +\infty$ et que $\exp(a)-1 > 0$ alors par minoration, $x_n \to= \infty$.
et de l'inégalité

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n+2n}$$

on déduit par encadrement que $\ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right) \to a$, lorsque n tend vers $+\infty$.

f) En prenant l'image par exp qui est continue sur $\mathbb{R}$ ($\lim_{x\to a}\exp(x) = \exp(a)$) on a alors

$$1+\frac{2n}{x_n} \to e^a \text{ et } \frac{2n}{x_n} \to e^a - 1 \neq 0$$

d'où l'équivalent

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{e^a-1}$$

puisque leur quotient tend vers 1.

(ECRICOME 2001)