# 1 EXERCICE

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble $E$ des matrices $M(a,b)$ définies par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$E = \{M(a,b) \quad a,b \in \mathbb{R}\}.$$

On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M(a,b)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

## 1.1 Structure de $E$.

**1.** On a $E = \left\{ \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} /a,b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} /a,b \in \mathbb{R} \right\}$

on reconnaît $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1,0)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(0,1)$

Donc $E = Vect\left(M(1,0), M(0,1)\right)$ sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**2.** On a du même coup pour famille génératrice : $\left(M(1,0), M(0,1)\right)$

Pour montrer qu'elle est libre on montre que **si** une combinaison linéaire est nulle **alors** les coefficients sont nuls :

Soient $a$ et $b$ deux réels. Si $aM(1,0) + bM(0,1) = 0$ alors $\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $a = 0$ et $b = 0$.

Cette famille est donc libre et génératrice. C'est donc une base de $E$ qui est donc de dimension 2.

## 1.2 Étude d'un cas particulier.

On pose $A = M(1,0)$.

**1.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Donc $A \cdot A = I$ (et $A \cdot A = I$) $A$ est inversible et son inverse est $A^{-1} = A$

**2.** On peut utiliser la relation précédente pour en déduire les seules valeurs propres **possibles** de $A$ :

- **Si** $\alpha$ est une valeur propre de $A$ et $X$ une colonne propre (non nulle) alors $A^2X = A(AX) = \alpha AX = \alpha^2 X$ et comme $A^2 = I$, on a aussi $A^2X = X$ donc $\alpha^2 X = X$ et comme $X \neq 0$ on a $\alpha^2 = 1$. **Alors** $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$

- **Est-ce que** 1 est valeur propre de $A$? (on aura besoi du sous espace propre ensuite). Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$(A-I)\cdot X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y$ donc 1 est bien valeur propre et a pour sous espace propre associé :
$\mathcal{S}_1 = \{(y,y,z) \ / \ y,z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((1,1,0),(0,0,1)\right)$
Ces **deux** vecteurs sont non colinéaires. Ils forment donc une famille libre.
C'est donc une famille libre et génératrice i.e. une base du sous espace propre.
- De la même façon **est-ce que** -1 est valeur propre de $A$?
$A\cdot X = -1\cdot X \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x=-y \\ z=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_{-1} = \{(x,-x,0) \ / \ x\in\mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((1,-1,0)\right)$
Donc $-1$ est bien valeur propre et le sous espace propre associé à -1 est engendré par $((1,-1,0))$ qui en est donc une base .
- Ce sont donc les deux seules valeurs propres de $A$

**3.** Soient $\vec{i} = (1,1,0)\,, \quad \vec{j} = (0,0,1)$ et $\vec{k} = (1,-1,0)\,.$
Ils ont pour coordonnées dans la base canonique $(1,1,0)\,, \quad (0,0,1)$ et $(1,-1,0)$
Comme $A$ est la matrice de $f_{1,0}$ dans la base $\mathcal{B}$ les vecteurs $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ forment une base du sous espace propre de $f_{1,0}$ associés à la valeur propre 1 et le vecteur $\left(\vec{k}\right)$ est une base du sous espace propre associé à la valeur propre $-1$.
Comme la somme des dimensions des sous espaces propres est égal à 3 (dimension de $\mathbb{R}^3$ ) la concaténation $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de ces bases forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Et la matrice de $f_{1,0}$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

## 1.3 Diagonalisation des éléments de $E$ et application.

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{u} = (1,1,1), \quad \vec{v} = (1,-1,0), \quad \vec{w} = (1,1,-2).$$

**1.** Les matrices de $E$ sont symétriques donc diagonalisables.

**2.** Comme $\mathcal{C} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ a 3 éléments, il suffit de montrer que la famille est libre pour montrer qu'elle est une base :
**Si** $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w} = \vec{0}$ **alors** $\ldots x=y=z=0$
**Mais comme on demande ensuite la matrice inverse** de la matrice de passage, il est plus économe de tout faire en même temps.
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base si et seulement si la matrice de leurs coordonnées (en colonne) est inversible.
Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ cette matrice. On applique la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1+L_2/2 \\ -L_2/2 \\ L_3-L_2/2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1+L_3/3 \\ L_2 \\ -L_3/3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1+L_3/3 \\ L_2 \\ -L_3/3 \end{array}$$

Donc $P$ est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$

**Un raccourci** de la rédaction (le calcul d'inverse est à faire au brouillon) est de constater (sans expliquer d'où vient cette matrice) que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$

**3.** La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est formée par les coordonnées (en colonne) des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc la matrice $P$ écrite ci-dessus.

**4.** $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$

**5.** On pourrait utiliser la formule de changement de base pour obtenir les coordonnées des images de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{C}$.

Mais comme ces vecteurs ne nous ont pas étés donnés au hasard, on peut tenter directement à partir de leurs coordonnées dans la base canonique et de la matrice de $f_{a,b}$ dans cette même base.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$ donc $f_{a,b}(\vec{u})$ a pour coordonnées dans $\mathcal{B}$ :

$$\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b+a \\ 2b+a \\ 2b+a \end{pmatrix}=(2b+a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $f_{a,b}(\vec{u})=(2b+a)\,\vec{u}$ et de même

$f_{a,b}(\vec{v})$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b-a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix}=(b-a)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $f_{a,b}(\vec{v})=(b-a)\,\vec{v}$

Et enfin $\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b \\ a-b \\ 2b-2a \end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $f_{a,b}(\vec{w})=(a-b)\,\vec{w}$

**6.** La matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$. est donc : $D_{a,b}=\begin{pmatrix} 2b+a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$

**7.** $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$. Son inverse $P^{-1}$ est donc la matrice de passage de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$. Donc la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$ s'obtient à partir de sa matrice $M_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$ par :

$$P^{-1}M_{a,b}P=D_{a,b}.$$

**8.** $D_{a,b}$ étant une matrice diagonale, elle est inversible si et seulement si les coefficients de la diagonale sont tous non nuls.

Donc si et seulement si $a\neq -2b$ et $a\neq b$

**9.** On a alors comme $D_{a,b}$ est diagonale, son inverse en inversant les coefficients de la diagonale :

$$D_{a,b}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/(2b+a) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(b-a) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(a-b) \end{pmatrix}$$

**10.** Les deux matrices $M_{a,b}$ et $D_{a,b}\acute{e}\tan t$ semblables, elles sont simultanément inversible. Donc $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a \neq -2b$ et $a \neq b$.

# 2 EXERCICE.

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

## 2.1 Étude des fonctions $f_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $h_n$ la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

**1.** $h_n$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{n+1+nx}{(1+x)^2}$$

Et comme $x > -1$ on a $nx > -n$ et $h_n'(x) > 0$.
Donc $h_n$ est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$

**2.** On a : $h_n(0) = 0$, et comme $h_n$ est strictement croissante, sur $]-1,0[$ on a :
$\boxed{h_n < 0 \text{ sur } ]-1,0[ \text{ et sur } ]0,+\infty[ \text{ on a } h_n > 0}$

**3.** Étude du cas particulier $n = 1$.

**a)** $f_1(x) = x\ln(1+x)$.
La composée de $x \to 1+x$ dérivable sur $]-1,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ où ln est dérivable.
Et $x \to x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f_n$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$$

**b)** Donc $f_1$ est strictement décroissante sur $]-1,0[$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

**a)** Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \to x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (la formule pour dériver serait différente pour la puissance 0) donc (produit et somme ) $f_n$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) \\ &= x^{n-1}h_n(x) \end{aligned}$$

**b)** Donc si $n$ est pair, $n-1$ est impair donc

$n$ pair :

| $x$ | -1 | | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^{n-1}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n'$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$n$ impair :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^{n-1}$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

En -1, $x^n \to +1$ si $n$ est pair et $x^n\ln(1+x) \to -\infty$ et $x^n\ln(1+x) \to +\infty$ si $n$ impair
En $+\infty$ : $x^n\ln(1+x) \to +\infty$

## 2.2 Étude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

### 2.2.1 Calcul de $U_1$.

**1.** Pour comparer, on met les deux expressions sous la même forme (même dénominateur) en réordonnant par rapport aux puissances de $x$ :

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2 + (b+a)\,x + b + c}{x+1}$$

On a donc l'égalité **si** $a = 1$ et $b + a = 0$ et $b + c = 0$ soit $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$
Une autre rédaction est de chercher ces coefficients au brouillon et de constater que :

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

et donc que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$ conviennent

**2.** On peut alors déterminer une primitive (la fonction intégrée est continue sur l'intervalle d'intégration) et $x + 1 > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_{x=0}^1 \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**3.** On a

$$U_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

et en intégrant par partie (on dérive le ln pour le faire disparaître)
$u(x) = \ln(1+x)$, $u$ de classe $C^1$ sur $[0,1]$, $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$
$v'(x) = x$, $v'$ est continue $v(x) = x^2/2$

$$\begin{aligned}U_1 &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

### 2.2.2 Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**1.** Pour monter que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, il suffit de comparer $U_n$ et $U_{n+1}$.
Comme ce sont des intégrales, on compare leurs contenus sur $[0,1]$ :
$x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et comme $\ln(1+x) \geq 0$ sur $[0,1]$ (car $1+x \geq 1$) donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leq x^n\ln(1+x)$ et comme $0 \leq 1$ (ordre des bornes) on a alors

$$\int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx$$

et $U_{n+1} \leq U_n$.
*Conclusion :* $\boxed{\text{la suite } U \text{ est décroissante}}$

2. Toutes ces intégrales sont positive ou nulles car le contenu est positif et les bornes sont en ordre croissant
Donc $U$ est décroissante et minorée par 0donc convergente.
3. Pour encadrer l'intégrale, on encadre là encore le contenu. Pour obtenir $\frac{1}{n+1}$ on conserve le $x^n$ dans cet encadrement. On se contente donc d'encadre le ln :
Si $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq 1+x \leq 2$ et comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que 1, $1+x$ et 2 en sont éléments, $\ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$.
Comme $x^n \geq 0$ alors $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$
Enfin comme $0 \leq 1$ :
$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\, dx = \ln(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$$
*Conclusion :* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}}$
4. Et comme $\frac{\ln 2}{n+1} \to 0$, $\boxed{\text{par encadrement } U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$

### 2.2.3 Calcul de $U_n$ pour $n \geqslant 2$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :
$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

1. Comme $-x \neq 1$ on a :
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{(-x)^{n+1} - 1}{-x-1}. \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \end{aligned}$$
2. On a donc en intégrant l'égalité précédente sur $[0,1]$ :
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k dx &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{x=0}^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$
d'une part et d'autre part
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx \end{aligned}$$

et finalement
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

**3.** On reconnaît dans la formule proposée $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. On fait donc apparaître dans l'expression de $U_n$ la quantité $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$ :
On a
$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$$
avec $u(x) = \ln(1+x)$, $u$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et $u'(x) = \frac{1}{1+x}$
et avec $v'(x) = x^n$ continue on a $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc en intégrant par parties :
$$\begin{aligned} U_n &= \left[\frac{x^{n+1}\ln(1+x)}{n+1}\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}dx \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \end{aligned}$$
et de
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$
on tire
$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = (-1)^n \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right]$$
d'où finalement
$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

# 3 EXERCICE.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c$ boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de $n$ tirages ($n \geqslant 2$).

## 3.1 Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici $n$ tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des $n$ tirages et $Y$ la variable aléatoire réelle définie par :
– $Y = k$ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au $k^{ième}$ tirage.
– $Y = 0$ si les $n$ boules tirées sont noires.

**1.** On effectue $n$ tirages indépendants (le contenu de l'urne ne change pas) pour lesquels la probabilité d'obtenir *blanc* est toujours $1/2$ (boules équiprobables). Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$ et $E(X) = n/2$ et $V(x) = n/4$

**2.** Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $(Y = k)$ signifie qu'on obtient $B$ pour la première fois au $k^{ième}$ tirage. Donc que l'on a eu $N$ pour les tirages précédents

$$(Y = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \cap B_k$$

et les tirages étants indépendants, .

$$p(Y = k) = \prod_{i=1}^{k-1} p(N_i) \cdot p(B_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$(Y = 0)$ signifie qu'il n'y a eu que des $N$ lors des $n$ tirages. Et donc $P(Y = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**3.** Pour calculer cette somme, il faut traiter à part la valeur $k = 0$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} p(Y = k) &= \sum_{k=1}^{n} P(Y = k) + p(Y = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

**4.** On le démontre par récurrence : Pour $x \neq 1$

- Pour $n = 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{1} kx^k &= x \text{ et} \\
\frac{1x^{1+2} - (1+1)x^{1+1} + x}{(1-x)^2} &= x\frac{x^2 - 2x + 1}{(1-x)^2} = x
\end{aligned}$$

  d'où l'égalité.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

  alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)\, x^{n+1} \\
&= (n+1)\, x^{n+1} + \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(n+1)\, x^{n+1}(1-x)^2 + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(n+1)\, x^{n+1} - 2\,(n+1)\, x^{n+2} + (n+1)\, x^{n+3} + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(n+1)\, x^{n+3} + -(n+2)\, x^{n+2} + x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

  Ce qu'il fallait démontrer

– Donc la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$

**5.** On a alors

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot p(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(Y=k) + 0 \cdot p(Y=0) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} \\ &= 4\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) \\ &= -(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 2 \end{aligned}$$

## 3.2 Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :
– $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au $i^{ème}$tirage
– $X_i = 0$ sinon
On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire $Z_p$, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

**1.** $X_i$ compte le nombre de boule(s) balnches obtenue au $i^{ème}$ tirage (uniquement). $Z_p$ est donc le nombre total de boules blanches obtenues lors des $p$ premiers tirages.

**2.** Au premier tirages, les 2 boules sont équiprobables. Donc $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et $p(X_1 = 1) = p(X_2 = 1) = 1/2$ et $X_1$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$. On a don $E(X) = 1/2$ et $V(X) = 1/4$

**3.** Il y a ici 4 probabilités à déterminer en décomposant en fonction du résultat de chacun des deux premiers tirages :

– $(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = (N_1 \cap N_2)$ donc $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = p(N_1 \cap N_2) = p(N_1)\, p(N_2/N1)$.
Quand on a $N_1$ on rajoute alors $c$ boules Noires. Il y a donc 1 blanche et c+1 noirs lors du second tirage. Ces boules étant équiprobables :
$p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$

– De même $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = p(N_1 \cap B_2) = p(N_1)\, p(B_2/N1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2}$

– $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = p(B_1 \cap N_2) = p(B_1)\, p(N_2/B_1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2}$

– et enfin $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)\, p(B_2/B1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$

La loi de $X_2$ est la loi marginale :

– $p(X_2 = 0) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$

– $p(X_2 = 1) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$

La loi de $X_2$ est donc la même que celle de $X_1$ et $E(X_2) = E(X_1) = 1/2$

**4.** Ici $Z_2$ est la somme de deux variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre de succès. **Mais** elles ne sont pas indépendantes. On ne peut donc pas conclure que $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/2)$

- $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- $(Z_2 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ et $p(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$ (d'après la loi du couple)
- $(Z_2 = 1) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ et comme ces deux parenthèses sont incompatibles :
  $p(Z_2 = 1) = p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{c+2}$
- $(Z_2 = 2) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$ et $p(Z_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$.

**5.** On peut avoir en $p$ tirages de $0$ à $p$ boules blanches. Donc $Z_p(\Omega) = [[0, p]]$

**6.** Soit $p \leqslant n - 1$.

**a)** Quand $(Z_p = k)$ on a obtenu $k$ boules blanches et $p - k$ boules noires. On a donc rajouté lors de ces tirages $k \cdot c$ boules blanches et $(p - k)c$ boules noires.
Il y a donc $k \cdot c + 1$ blanches et $(p - k)c + 1$ noires lors du $p + 1^{ième}$ tirages.
Ces boules étant équiprobables

$$p(X_{p+1} = 1 / Z_p = k) = \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2}$$

**b)** Les événements $(Z_p = k)_{k \in [[0,p]]}$ forment un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} p(X_{p+1} = 1 / Z_p = k) p(Z_p = k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2} p(Z_p = k) \dots \end{aligned}$$

Mais on ne connaît pas la loi de $Z_p$... Aussi ne fait on apparaître que son espérance :

$$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2} p(Z_p = k) = \frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{p} (k \cdot c + 1) p(Z_p = k) \\ &= \frac{1}{pc+2} \left[ c \sum_{k=0}^{p} k p(Z_p = k) + \sum_{k=0}^{p} p(Z_p = k) \right] \\ &= \frac{1}{pc+2} \left[ cE(Z_p) + 1 \right] = \frac{cE(Z_p) + 1}{2 + pc} \end{aligned}$$

**c)** On en déduit par récurrence que $X_p$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

- Pour $p = 1$, $X_1$ suit bien une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$
- Soit $p \geq 1$ tel que pour tout $k \in [[1, p]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$
  Alors $E(Z_p) = \sum_{k=1}^{p} E(X_i) = p/2$
  et

$$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \frac{cE(Z_p) + 1}{2 + pc} = \frac{\frac{cp}{2} + 1}{2 + pc} = \frac{cp + 2}{2(cp + 2)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  et donc $p(X_{p+1} = 0) = 1 - p(X_p = 1) = \frac{1}{2}$
  Donc $X_{p+1}$ suit une loi binomiale de paramètre $1/2$
- Donc pour tout entier $p \geq 1$ : $X_p$ suit une loi binomiale de paramètre $1/2$.