**Corrigé ECRICOME 2004 Voie Eco** par Pierre veuillez

# 1 EXERCICE

Soient $f$ la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et $(u_n)$ la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de $f$, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

## 1.1 Etude de $f$.

1. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$

   Donc $f$ est paire sur $\mathbb{R}$
2. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

   Donc

| $x$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

3. En $+\infty \sqrt{1+x^2} \to +\infty$ donc $f(x) \to 0$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
4. $f$ est minorée par 0 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}^+$ donc par parité, sur $\mathbb{R}^-$ également.
   Donc $f$ est bien bornée sur $\mathbb{R}$.
5. Il faut tracer les asymptotes ($y = 0$ ) en $\pm\infty$ et la tangente horizontale en 0.
   IL faut respecter le sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ et compléter par symétrie par rapport à la droite $Oy$
   D'où une courbe en chapeau de gendarme.
6. Comme $f$ est continue et strictement décroissantes,
   elle est bijective de $[0, +\infty[$ dans $]\lim_{+\infty} f, f(0)] = ]0, 1] = J$
7. Pour tout $y$ de l'intervalle $]0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y \\ &\iff \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \quad \text{car } y \neq 0 \\ &\iff 1 + x^2 = \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

   car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\sqrt{1+x^2}$ et $\frac{1}{y^2}$ en sont éléments.

$$f(x) = y \iff x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

et comme $y \in ]0,1]$ alors $1-y^2$ (binôme) est positif, et que $\sqrt{}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \end{aligned}$$

car $x \geq 0$ et $y > 0$

Donc l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}^+$ est $x = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$

8. (Comme $f$ est bijective, on savait déjà qu'elle avait une réciproque)
   Pour tout $y \in ]0,1]$ et $x \in \mathbb{R}^+$ on a

   $$f(x) = y \iff x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

   donc on retrouve que $f$ a une réciproque sur $\mathbb{R}^+$ et que $f^{-1}$ définie sur $]0,1]$ par :

   $$f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

## 1.2 Calcul d'aire

On considère la fonction numérique $F$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel $\lambda$ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{2\lambda} f(x)\,dx$$

1. On peut résoudre(1) : $x + \sqrt{x^2+1} > 0 \iff x > -\sqrt{x^2+1}$ mais pour élever au carré, il faut distinguer suivant que $x \in \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$.
   - Si $x \in \mathbb{R}^-$, comme carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et que $-\sqrt{x^2+1}$ en est élément, (1) $\iff x^2 < x^2+1 \iff 0 < 1$ ce qui est toujours vrai.
   - si $x > 0$ alors comme $-\sqrt{x^2+1} \leq 0$ alors (1) est vérifiée
   - Donc elle vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$

   Ou bien, on peut reconstruire l'inégalité :
   Pour tout $x \in \mathbb{R} : x^2+1 > x^2$
   donc comme $\sqrt{}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $x^2$ et $x^2+1$ en sont éléments :
   $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$ (on sait que $-|x| \leq x \leq |x|$ ) donc $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   Donc $F$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Comme $\sqrt{x^2+1}+x>0$ alors $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x) \end{aligned}$$

Donc $F$ est bien une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $-x \in \mathbb{R}$ et $F(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\ldots$ que l'on a du mal à rapprocher de $F(x)$
Mais $F(x)+F(-x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) = \ln\left(\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)$
Identité remarquable : $F(x)+F(-x) = \ln\left(1+x^2-x^2\right) = 0$
et finalement $F(-x) = -F(x)$ et $F$ est bien impaire sur son ensemble de définition.
4. Quand $x$ tend vers $+\infty$ : $x+\sqrt{1+x^2} \to +\infty$ donc $F(x) \to +\infty$
Et comme $F$ est impaire, $F(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $-\infty$
5. Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $F$ une primitive, on a :

$$\mathcal{A}(\lambda) = [F(x)]_{x=\lambda}^{2\lambda} = F(2\lambda) - F(\lambda)$$

forme indéterminée en $+\infty$

$$\begin{aligned} F(2\lambda)-F(\lambda) &= \ln\left(2\lambda+\sqrt{(2\lambda)^2+1}\right) - \ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right) \\ &= \ln\left(2\lambda\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2\lambda^2}}\right)\right) - \ln\left(\lambda\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right)\right) \\ &= \ln(2)+\ln(\lambda)+\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2\lambda^2}}\right) - \ln(\lambda) - \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right) \\ &= \ln(2)+\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2\lambda^2}}\right) - \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right) \\ &\to \ln(2) \end{aligned}$$

on peut développer le ln car les termes sont tous strictement positifs
Finalement $\mathcal{A}(\lambda) \to \ln(2)$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$.

## 1.3 Etude de la suite $(u_n)$.

1. On revient à l'intégrale :

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_{x=0}^{1} \\ &= F(1)-F(0) \\ &= \ln(3)-\ln(1) \\ &= \ln(3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

car on remarque que $x$ est à peu près la dérivée du contenu de la racine.

2. On a $u_3 = \int_0^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$
Soit $u(x) = x^2 : u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} : v(x) = \sqrt{1+x^2}$ avec $u$ et $v$ de classe $C^1$ sur $[0,1]$

$$\begin{aligned} u_3 &= \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{1/2}dx \\ &= \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{2} - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Pour comparer les intégrales $u_n$ et $u_{n+1}$ on compare d'abord les contenus :
$x^{n+1}f(x) - x^n f(x) = x^n f(x)(x-1)$
et comme sur $[0,1]$ : $f(x) \geq 0$ et $x-1 \leq 0$ alors $0 \leq x^{n+1}f(x) \leq x^n f(x)$ sur $[0,1]$
De plus $0 \leq 1$ donc $0 \leq \int_0^1 x^{n+1}f(x)\,dx \leq \int_0^1 x^n f(x)\,dx$ et $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$
Donc la suite $(u_n)$ est décroissante.
4. Donc la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
5. On a vu que $f$ était comprise entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}^+$.
Donc $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ et comme $x^n \geq 0$ sur $[0,1]$ alors $0 \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$
Comme $0 \leq 1$ alors

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_{x=0}^1$$

et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Et comme $\frac{1}{n+1} \to 0$ alors par encadrement $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

# 2 EXERCICE

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

## 2.1 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient $A$ et $P$ les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On applique la méthode de Gauss :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 - 2L_3 \to L_3 \\ L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 \to L_1 \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 + L_2 \\ \\ L_3 - 3L_2 \end{array}$$
$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ \\ -L_3 \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$
Donc $P$ est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   a) On a $T = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   b) Donc $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   et $T^3 = T^2 T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
   Donc pour tout $n \geq 3$, puis $T^n = T^{n-3}T^3 = 0$ (on peut développer la puissance car $n - 3 \geq 0$ )

3. On a alors
$$\forall n \geq 3, \quad A^n = PT^nP^{-1} = 0$$

4. Pour tout réel $t$, on définit la matrice $E(t)$ par :
$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
où $I$ désigne la matrice unité d'ordre 3.
   a) on simplifie le produit en utilisant que $A^3 = A^4 = 0$
$$\begin{aligned} E(t)\,E(t') &= \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2\right) \\ &= I + (t+t')\,A + \left(\frac{t^2}{2} + t\,t' + \frac{t'^2}{2}\right)A^2 + \left(t\frac{t'^2}{2} + t'\frac{t^2}{2}\right)A^3 + \frac{t^2t'^2}{4}A^4 \\ &= I + (t+t')\,A + \frac{1}{2}(t+t')^2 A^2 \\ &= E(t+t') \end{aligned}$$
   **N.B.** c'est cette propriété qui est caractéristique de l'exponentielle. ($e^{a+b} = e^a e^b$ )

b) On a pour tout $t$ réel, $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$

Donc $E(t)$ est inversible et $E(t)^{-1} = E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2$

c) On a aussi par une récurrence immédiate que $[E(t)]^n = E(nt) = I + nt\,A + \frac{(nt)^2}{2}A^2$ pour tout entier naturel $n$.

## 2.2 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient $B$ et $D$ les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour out entier naturel $n$ non nul, et pour tout réel $t$, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. On recherche les sous-espaces propres de $B$ :
   $(B-\alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -\alpha x - y = 0 \\ 2x + (3-\alpha)y = 0 \end{cases} \iff (1)\begin{cases} y = -\alpha x \\ [2-(3-\alpha)\alpha]x = 0 \end{cases}$
   Comme $[2-(3-\alpha)\alpha] = 2 - 3\alpha + \alpha^2$ a pour racines $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$
   – si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$ alors $(1) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ et $\alpha$ n'est pas valeur propre.
   – si $\alpha = 1$ alors $(1) \iff y = -x$ et 1 est valeur propre associé au sous espace propre $\mathrm{Vect}((1,-1))$
   – si $\alpha = 2$ alors $(1) \iff y = -2x$ et 2 est valeur propre associé au sous espace propre $\mathrm{Vect}((1,-2))$
   Donc $B$ de taille 2 a deux valeurs propres distinctes est donc diagonalisable.
2. On a une base de vecteurs propres en concaténant 1 vecteurs propres de chaque sous espace associés respectivement à 1 et 2 (ordre dans $D$ ) .
   Donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et convient pour $B = QDQ^{-1}$ soit $Q^{-1}BQ = D$
3. On peut calculer l'inverse de $Q$ puis développer $QD^nQ^{-1}$ on procéder par récurrence :
   – pour $n = 0$ : $\begin{pmatrix} 2-2^0 & 1-2^0 \\ 2^{0+1}-2 & 2^{0+1}-1 \end{pmatrix} = I = B^0$
   – Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$
   alors $B^{n+1} = B^nB = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 1-2^{n+1} \\ 2^{n+2}-2 & -1+2^{n+2} \end{pmatrix}$
   – Donc pour tout entier $n$ : $B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$
   On économise ainsi le calcul de l'inverse et un produit de matrices.
4. La somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k$ de matrice se calcule terme à terme. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(2-2^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$

   et de même

$$
\begin{aligned}
b_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(2^{k+1}-2\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-2t^k + 2\,(2t)^k}{k!} \\
c_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(1-2^{k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!} \\
d_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(2^{k+1}-1\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-t^k + 2\,(2t)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

5. En développant, on fait apparaître des sommes partielles de séries exponentielles :

$$
\begin{aligned}
a_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \\
&\to 2e^t - e^{2t}
\end{aligned}
$$

et de même

$$
\begin{aligned}
b_n(t) &= -2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \to -2e^t + 2e^{2t} \\
c_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \to e^t - e^{2t} \\
d_n(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \to -e^t + 2e^{2t}
\end{aligned}
$$

lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

6. a) On a donc bien

$$
E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}
$$

b) On sépare alors les termes :

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix} \\
&= e^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

donc $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ conviennent pour $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$

c) On trouve alors :

$E_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = E_1$

$E_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = E_2$

$E_1 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $E_2 E_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) En s'inspirant de la partie précédente .... on calcule

$$\begin{aligned}
E(t)\,E(-t) &= \left(e^{t}E_1+e^{2t}E_2\right)\left(e^{-t}E_1+e^{-2t}E_2\right)\\
&= e^{t-t}E_1^2+e^{t-2t}E_1E_2+e^{2t-t}E_2E_1+e^{2t-2t}E_2^2\\
&= E_1+E_2\\
&= I
\end{aligned}$$

Donc $E(t)$ est inversible et son inverse est $E(-t)$

# 3 Exercice

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur $A$ ou le serveur $B$.
On constate que le serveur $A$ est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur $B$ est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur $A$ soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur $B$ est de 0.05.

   a) Passer par le serveur $A$ ou $B$ forme un système complet d'événement. En notant $E$ "il y a une erreur de transmission"

   $$\begin{aligned}
   p(E) &= p_A(E)\,p(A)+P_B(E)\,p(B)=0.1\times 0.7+0.05\times 0.3\\
   &= 0.0\,85
   \end{aligned}$$

   b) "**si** le courrier a subi une erreur de transmission" pose une condition..
   On demande donc ici $p(A/E)$ alors que la probabilité donnée est $p(E/A)$

   $$\begin{aligned}
   p(A/E) &= \frac{p(A\cap E)}{p(E)}=\frac{p_A(E)\,p(A)}{p(E)}\\
   &= \frac{0.1\times 0.7}{0.085}=\frac{70}{85}=\frac{14}{17}
   \end{aligned}$$

   Donc, si le courrier a subi une erreur de transmission, la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur $A$ vaut $\frac{14}{17}$.

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur $A$, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur $B$, et le jour 6 le serveur $A$. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$)
   On note $L_1$ la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et $L_2$ la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.
   Ainsi, pour $k\geq 1$, dire que $L_1=k$ signifie que pendant les $k$ premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

   a) $L_1=k$ signifie que pendant les $k$ premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.
   Ce serveur peut-être le $A$ ou le $B$.

Donc $(L_1 = k) = (A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap B_{k+1}) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap A_{k+1})$
Les deux parenthèses étant incompatibles
$P(L_1 = k) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap B_{k+1}) + P(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap A_{k+1})$
et les choix de serveurs sont indépendants donc

$$\begin{aligned} P(L_1 = k) &= P(A_1) \dots p(A_k)\, p(B_{k+1}) + P(B_1) \dots p(B_k)\, p(A_{k+1}) \\ &= (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3) \end{aligned}$$

b) On passe par la somme partielle :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} P(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{N} (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3) \\ &= (0.7) \sum_{k=1}^{N} (0.3)^k + (0.3) \sum_{k=1}^{N} (0.7)^k \\ &= (0.7) \left( \sum_{k=0}^{N} (0.3)^k - 1 \right) + (0.3) \left( \sum_{k=1}^{N} (0.7)^k - 1 \right) \\ &\to 0.7 \left( \frac{1}{1-0.3} - 1 \right) + 0.3 \left( \frac{1}{1-0.7} - 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

la convergence venant de $|0.3| < 1$ et $|0.7| < 1$. Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(L_1 = k) = 1$$

c) $L_1$ a une espérance si $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(L_1 = k)$ est absolument convergente. ($\Longleftrightarrow$ convergente car $k\, P(L_1 = k) \geq 0$ )

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} |k\, P(L_1 = k)| &= \sum_{k=1}^{N} k\, P(L_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} k\, (0.3)^k (0.7) + k\, (0.7)^k (0.3) \\ &= (0.7) \sum_{k=1}^{N} (0.3)^k + (0.3) \sum_{k=1}^{N} (0.7)^k \\ &= (0.7) \left( \sum_{k=0}^{N} k\, (0.3)^k - 0 \right) + (0.3) \left( \sum_{k=1}^{N} k\, (0.7)^k - 0 \right) \\ &\to 0.7 \frac{0.3}{(1-0.3)^2} + 0.3 \frac{0.7}{(1-0.7)^2} = \frac{0.3}{0.7} + \frac{0.7}{0.3} = \frac{0.58}{0.21} \end{aligned}$$

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, p(L_1 = k)$ est absolument convergente et sa somme vaut $E(L_1) = \frac{58}{21}$

d) Les valeurs possibles de $L_1$ et de $L_2$ sont $[1, +\infty[$
Comme précédemment on décompose $(L_1 = i \cap L_2 = j)$ suivant que le premier serveur choisi a été $A$ ou $B$ :

$$(L_1 = i \cap L_2 = j) = \left( \bigcap_{k=1}^{i} A_k \bigcap_{k=i+1}^{i+j} B_k \cap A_{i+j+1} \right) \bigcup \left( \bigcap_{k=1}^{i} B_k \bigcap_{k=i+1}^{i+j} A_k \cap B_{i+j+1} \right)$$

les deux parenthèses étant incompatibles et les choix de serveurs indépendants

$$\begin{aligned}
P(L_1=i\cap L_2=j) &= \prod_{k=1}^{i}p(A_k)\prod_{k=i+1}^{i+j}p(B_k)\times P(A_{i+j+1})+\prod_{k=1}^{i}p(B_k)\prod_{k=i+1}^{i+j}p(A_k)\times P(B_{i+j+1})\\
&= 0.7^i\times 0.3^j\times 0.7+0.3^i\times 0.7^j\times 0.3\\
&= 0.7^{i+1}\times 0.3^j+0.3^{i+1}\times 0.7^j
\end{aligned}$$

e) donc pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}_*^2 : P(L_1=i\cap L_2=j)=0.7^{i+1}\times 0.3^j+0.3^{i+1}\times 0.7^j$

f) La loi de $L_2$ est la loi marginale :

$L_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $j\in\mathbb{N}^* : P(L_2=j)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(L_1=i\cap L_2=j)$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}P(L_1=i\cap L_2=j) &= \sum_{i=1}^{N}\left(0.7^{i+1}\times 0.3^j+0.3^{i+1}\times 0.7^j\right)\\
&= 0.3^j\sum_{i=1}^{N}0.7^{i+1}+0.7^j\sum_{i=1}^{N}0.3^{i+1}\\
\text{réindexé } k=i-1 \quad &= 0.3^j\sum_{k=0}^{N-1}0.7^{k+2}+0.7^j\sum_{k=0}^{N-1}0.3^{k+2}\\
&\to 0.3^j\frac{0.7^2}{1-0.7}+0.7^j\frac{0.3^2}{1-0.3}
\end{aligned}$$

quand $N$ tend vers $+\infty$, convergentes car $|0.3|<1$ et $|0.7|<1$

donc $P(L_2=j)=0.3^j\frac{49}{30}+0.7^j\frac{9}{70}$ pour $j\in L_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note : $N_n$ la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur $A$ pendant les $n$ premiers jours, $T_1$ le numéro du jour où pour la première fois le serveur $A$ est choisi et $T_2$ le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur $A$ est choisi.

   a) $N_n$ est le **nombre de** choix du serveur $A$ en **n** choix **indépendants** qui ont tous la **même probabilité** 0.7,

   Donc $N_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,0.7)$ et $E(N_n)=0.7n$ et $V(X)=0.21n$

   b) $T_1$ est le rang du **premier** choix de $A$ dans une **suite** de choix indépendants qui ont tous la **même** probabilité 0.7,

   Donc $T_1\hookrightarrow\mathcal{G}(0.7)$ et $E(T_1)=\dfrac{1}{0.7}$ et $V(T_1)=\dfrac{0.3}{0.49}=\dfrac{30}{49}$

   c) Pour $k\geq 2$, $(T_2=k)$ signifie que *on* a eu $A$ au $k^{ième}$ et que c'était le second. Donc qu'il n'y en avait eu qu'un seul avant.

   Donc $(T_2=k)=(N_{k-1}=1)\cap A_k$ indépendants et $\forall k\geq 2$,

$$\begin{aligned}
P(T_2=k) &= P(N_{k-1}=1)\ P(A_k)\\
&= \binom{k-1}{1}0.7^1 0.3^{k-1-1}\times 0.7\\
&= (k-1)(0.7)^2(0.3)^{k-2}
\end{aligned}$$

4. Le temps de transmission en seconde d'un message par le serveur $A$ est une variable aléatoire $Z$ qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

   Le prix en euros $W$ de cette transmission, est calculé de la façon suivante : on multiplie la durée de transmission en seconde par 0.1 euro, auquel on ajoute une somme forfaitaire de 1 euro.

a) Une densité $f_Z$ de $Z$ est $\begin{cases} f_Z(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ f_Z(t) = e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$ et sa fonction de répartition est :
$\begin{cases} F_Z(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ F_Z(t) = 1 - e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

b) Le temps moyen de transmission est l'espérance de $Z$ soit $E(Z) = 1/1 = 1$

c) D'après l'énoncé on a $W = 0.1 \times Z + 1$

d) La fonction de répartition de $W$ est donnée par :

$$\begin{aligned} F_W(t) &= P(W \leq t) = P(0.1 \times Z + 1 \leq t) \\ &= P(Z \leq 10t - 10) \\ &= F_Z(10t - 10) \end{aligned}$$

Comme $Z$ est à densité, $F_Z$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (là où $f_Z$ est continue)
Donc $F_W$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$
Donc $W$ est à densité et une densité de $W$ est donnée par $f_W(t) = F_W'(t) = 10\, f_Z(10t - 10)$

$$\begin{cases} f_W(t) = 0 \text{ si } t < 1 \\ f_Z(t) = 10e^{-10t-10} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

e) Comme $Z$ a une espérance, alors $W = W = 0.1 \times Z + 1$ également et

$$\begin{aligned} E(W) &= 0.1E(Z) + 1 = 0.1 + 1 \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

Déterminer l'espérance de la variable $W$.

5. On suppose que le temps de transmission d'un message en seconde par le serveur $B$ est représenté par la variable aléatoire $X$ dont une densité de probabilité $f$ est donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t^2/2} \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ )

a) $f$ est positive sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux et on étudie la convergence de son intégrale :
$\int_{-\infty}^0 f = \int_{-\infty}^0 0 = 0$ (converge)

$$\begin{aligned} \int_0^M f &= \int_0^M te^{-t^2/2} dt \\ &= \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^M \\ &= 1 - e^{-M^2/2} \\ &\to 1 \end{aligned}$$

quand $M$ tend vers $+\infty$
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1 donc $f$ est bien une densité de probabilité.

b) La fonction de répartition $F_X$ de $X$ est donnée par
– si $x \leq 0$ : $F_Z(t) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt = \int_{-\infty}^x 0 = 0$

– si $x > 0$ : $F_Z(t) = \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^x te^{-t^2/2} = 1 - e^{-x^2/2}$

c) $X$ a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge.

– $\int_{-\infty}^0 tf(t)\,dt$ converge et est nulle.

– pour $M \geq 0$ : $\int_0^M tf(t)\,dt = \int_0^M t^2e^{-t^2/2}dt$ que l'on intègre par parties.
$u(t) = t$ : $u'(t) = 1$ : $v'(t) = te^{-t^2/2}$ : $v(t) = -e^{-t^2/2}$ avec $u$ et $v$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_0^M tf(t)\,dt &= \left[-te^{-t^2/2}\right]_0^M - \int_0^M e^{-t^2/2}dt \\ &= -Me^{-M^2/2} - \int_0^M e^{-t^2/2}dt\end{aligned}$$

La forme indéterminée $Me^{-M^2/2}$ peut se lever en posant $x = M^2 \to +\infty$et $Me^{-M^2/2} = xe^{-x/2} = x/\left(\sqrt{e}^x\right) \to 0$ car $x$ est négligeable devant $\sqrt{e}^x$ avec $\sqrt{e} > 1$

Donc $\int_0^M tf(t)\,dt \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ quand $M$ tend vers $+\infty$

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc $X$ a une espérance et $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$