corrigé ECRICOME 2005 Option Economiquepar Pierre Veuillez

1 EXERCICE

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\ dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

φ_n étant continue, l'intégrale est bien définie.

1. On a $I_0 = \int_0^1 \varphi_0(x)\ dx = \int_0^1 e^{-2x}\ dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + 1$

   et $I_1 = \int_0^1 \varphi_1(x)\ dx = \int_0^1 (1-x)\, e^{-2x} dx$ en intégrant par parties avec $u(x) = (1-x)$: $u'(x) = -1$: $v'(x) = e^{-2x}$: $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ les fonctions u et v étant de classe C^1 on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

2. Comme on ne peut pas calculer facilement I_n, pour comparer I_n et I_{n+1} on compare d'abord leurs contenus :

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) &= (1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x} = (1-x)^n (1-x-1)\, e^{-2x} \\ &= -x(1-x)^n e^{-2x} \leq 0 \text{ sur } [0,1] \end{aligned}$$

   Donc $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$ sur $[0,1]$.

   Comme $0 \leq 1$ (bornes) alors $\int_0^1 \varphi_{n+1}(x)\ dx \leq \int_0^1 \varphi_n(x)\ dx$ et

   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } I \text{ est décroissante}}$

3. Pour déterminer le signe de I_n, on cherche celui de son contenu :

   Pour tout $x \in [0,1]$: $(1-x)^n e^{-2x} \geq 0$ donc $(0 \leq 1)$ on a $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\ dx \geq 0$ pour tout entier naturel n

4. La suite I étant décroissante et minorée par 0 elle est convergente vers une limie $\ell \geq 0$

5. La fonction $x \to e^{-2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc pour $x \geq 0$ on a $g(x) \leq g(0) = 1$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a $g(x) \leq 1$

6. On enchaine alors les inégalités sur le contenu puis l'intégrale :

   Pour tout $x \in [0,1]$: $e^{-2x} \leq 1$ et $(1-x)^n \geq 0$ donc $(1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n$ d'où

   $\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \leq \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ et finalment

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

7. *Conclusion :* $\boxed{\text{Par encadrement on a alors } I_n \to 0 \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$

8. On a $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x}dx$ on pose $u(x) = (1-x)^{n+1}$: $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$: $v'(x) = e^{-2x}$: $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ les fonctions u et v étant de classe C^1 on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n+1}{2}(1-x)^n e^{-2x}dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[1-(n+1)I_n\right] \end{aligned}$$

   et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$$

9. Comme $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$ on a alors $n\,I_n + I_n = 1-2I_{n+1}$ et $n\,I_n = 1-2I_{n+1} - I_n \to 1$

   Conclusion : $\boxed{n\,I_n \to 1 \text{ quand } n \to +\infty}$

10. D'après le développement précédent, on a $nI_n - 1 = -2I_{n+1} - I_n$ et donc $n(nI_n - 1) = -2n\,I_{n+1} - n\,I_n$ et on fait apparaître $(n+1)I_{n+1}$:

$$\begin{aligned} n(nI_n - 1) &= -2\frac{n}{n+1}(n+1)I_{n+1} - n\,I_n \\ &\to -3 \end{aligned}$$

    Conclusion : $\boxed{n(n\,I_n - 1) \to -3 \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}}$

11. Pour trouver valeurs de a, b, c, on cherche par identification :

    si $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$ comme $I_n \to 0$ alors $a = 0$ donc $I_n = \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$

    $nI_n = b + \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n) \to b$ or $n\,I_n \to 1$donc $b = 1$

    D'où $n\,I_n - 1 = \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)$ donc $n(n\,I_n - 1) = c + \varepsilon(n) \to c$ d'où $c = -3$

    Donc les seules valeurs possibles sont $a = 0$: $b = 1$ et $c = -3$

    Réciproquement : Il faut vérifier que la fonction ε restante tend bien vers 0 :

    Soit $\varepsilon(n) = n(nI_n - 1) + 3 \to 0$ quand $n \to +\infty$ et on a $n(nI_n - 1) = \varepsilon(n) - 3$ d'où $nI_n - 1 = \frac{1}{n}\varepsilon(n) - \frac{3}{n}$ et enfin

    Conclusion : $\boxed{I_n = 0 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \text{ avec } \varepsilon(n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \text{ et } a = 0 : b = 1 : c = -3}$

2 EXERCICE.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, & f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \\ & f(0) = -1 \end{cases}$$

le tableau de valeurs de f,

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	$-0,5$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

ainsi que les fonctions φ et g définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = x\,e^y - y\,e^x$$

2.1 Etude de deux suites associées à f.

1. f est continue en x tel que $x > 0$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$
   En 0 : $x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x} \to 0$ car $\ln(x) \ll \frac{1}{x}$ quand $x \to 0^+$
   donc $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \to -1 = f(0)$ quand $x \to 0^+$

   Donc f est continue à droite en 0 et est donc continue sur $\mathbb{R}^+$

2. On calcule son taux d'accroissement en 0 :

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x - \ln(x) \to +\infty$$

   donc f n'est pas dérivable en 0.

   Et la courbe représentatrice de f a une tangente verticale en 0.

3. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = 2x - \ln(x) - 1$ et $f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$
   qui est du signe de $2x - 1$ (affine).

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f'' < 0 \text{ sur } \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } f \text{ y est concave et } f'' > 0 \text{ sur } \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\text{ et } f \text{ y est convexe.}}$

   En $+\infty$: $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \to +\infty$ car $\ln(x) \ll x$

   En $\frac{1}{2}$: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln(2) > 0$ car $2 > 1$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$\searrow +$	$+$	$\nearrow +$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. On recherche la direction asymptotique en $+\infty$:

   $$\frac{f(x)}{x} = x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) \to +\infty$$

   on a donc une branche parabolique verticale.

5. Comme f est continue et strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\left]\lim_0 f, \lim_{+\infty} f\right[= \left]-1, +\infty\right[= J$

6. Par symétrie, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. (On a également $\lim_{-1} f^{-1} = 0$)

7. Pour tout entier k, on a $k \in]-1, +\infty[$ donc il existe un unique $x_k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(x_k) = k$.
Comme de plus $f(0) = -1 \neq k$, ce x_k est unique sur $\mathbb{R}^+$.

   a) x_0 est l'unique solution de $f(x) = 0$. Comme $f(1) = 0$ alors $x_0 = 1$.
   b) Comme $f(1,5) < 1 = f(x_1) < f(2) < 2 = f(x_2) < f(2,5)$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que tous les termes en sont éléments alors
   Conclusion : $\boxed{1,5 < x_1 < 2 < x_2 < 2,5}$
   c) Comme f est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans J, quue $x_k \in \mathbb{R}^{+*}$ et que $k \in J$ alors $f(x_k) = k \iff x_k = f^{-1}(k)$
   Conclusion : $\boxed{x_k = f^{-1}(k)}$
   Et comme f^{-1} est croissante sur J, pour tout entier k, comme $k < k+1$ alors $f^{-1}(k) < f^{-1}(k+1)$ et $x_k < x_{k+1}$
   Donc la suite x est croissante.
   Comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors $x_k = f^{-1}(k) \to +\infty$ quand $k \to +\infty$ et
   Conclusion : $\boxed{x_k \to +\infty \text{ quand } k \to +\infty}$

8. On définit la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

   a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2+x}{x^2}$
   En 0 : $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x) = \frac{2}{x}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{1/x}\right) \to +\infty$ car $\ln(x) \ll \frac{1}{x}$
   En $+\infty$: $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x) \to +\infty$
   En 2 : $\varphi(2) = 1 + \ln(2) \simeq 1,69$

	0		2		$+\infty$	
$-2+x$		$-$	0	$+$		affine
$\varphi'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$		
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$	

   Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   b) Comme φ est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ alors : si $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ alors $2 \geq \varphi\left(\frac{3}{2}\right) \geq \varphi(x) \geq \varphi(2) \geq \frac{3}{2}$ et donc $\varphi(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \varphi\left(\left[\frac{3}{2}, 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}, 2\right]}$
   c) φ' est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{4-x}{x^3} \geq 0$ sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$
   Donc φ' est décroissante sur l'intervalle et si $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ alors $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(2)$ soit $-\frac{2}{9} \leq \varphi'(x) \leq 0 \leq \frac{9}{2}$ et donc
$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$$

   d) 0 n'est solution ni pour l'une ni pour l'auter et
   Pour tout $x > 0$:
$$\begin{aligned} x = \varphi(x) &\iff \frac{2}{x} + \ln(x) = x \\ &\iff 2 + x\ln(x) = x^2 \text{ (car } x \neq 0) \\ &\iff x^2 - x\ln(x) - 1 = 1 \\ &\iff f(x) = 1 \end{aligned}$$

Or $f(x) = 1$ a pour unique solution x_1 donc $x = \varphi(x)$ également.

Conclusion : $\boxed{\varphi(x_1) = x_1}$

e) Pa récurrence :

- Pour $n = 0$: $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$
- Soit $n \geq 0$ tel que $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ alors $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ donc $\varphi(u_n) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$
- Donc pour tout entier n, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

On vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissments finis :

- on a vu que $1,5 < x_1 < 2$ donc $x_1 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et u_n également
- $|\varphi'| \leq \frac{2}{9}$ sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$
- donc $|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$ et comme $\varphi(x_1) = x_1$ on a bien alors $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$

Et par récurrence :

- Comme $u_0 = \frac{3}{2} \leq x_1 \leq 2$ alors $0 \leq x_1 - u_1 \leq \frac{1}{2}$ donc $|u_0 - x_1| \leq \frac{1}{2} \leq \left(\frac{2}{9}\right)^0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$ alors $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1| \leq \frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$ car $\frac{2}{9} \geq 0$
- Donc pour tout entier n : $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$

f) Comme $\left|\frac{2}{9}\right| < 1$ alors $\left(\frac{2}{9}\right)^n \to 0$ et par encadrement $|u_n - x_1| \to 0$

Conclusion : $\boxed{u_n \to x_1 \text{ quand } n \to +\infty}$

2.2 Recherche d'extremum éventuel de g.

1. $g(x, y) = x\,e^y - y\,e^x$

   La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= e^y - ye^x \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= xe^y - e^x \end{aligned}$$

2. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, si g admet un extremum local en (a, b) de $\mathbb{R}^2$ alors les deux dérivées partielles premières sont nulles et $\begin{cases} e^b - b\,e^a = 0 \\ a\,e^b - e^a = 0 \quad (1) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} e^b = b\,e^a \\ a\,b\,e^a - e^a = 0 \end{cases}$ et comme $e^a \neq 0$ on a alors $a\,b - 1 = 0$ et $a\,b = 1$

   Donc $b = \frac{1}{a}$ et de (1) on tire $a = e^a/e^b = e^{a-b} = e^{a-\frac{1}{a}}$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc si } g \text{ admet un extremum local en } (a, b) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ alors } \begin{cases} ab = 1 \\ a = e^{a-\frac{1}{a}} \end{cases}}$

   Comme $a = e^{a-\frac{1}{a}}$ alors $a > 0$ et donc $\ln(a) = \ln\left(e^{a-\frac{1}{a}}\right) = a - \frac{1}{a}$ et $a\ln(a) = a^2 - 1$ d'où $f(a) = 0$

   Conclusion : $\boxed{\text{si } g \text{ admet un extremum local en } (a, b) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ alors } \begin{cases} a > 0 \\ ab = 1 \\ f(a) = 0 \end{cases}}$

   Or la seule solution de $f(a) = 0$ est $a = 1$ d'où $b = 1$

   Donc le seul point où g peut admettre un extremum est le couple $(1, 1)$

3. g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

   - $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -y\,e^x$ et $r = -e$
   - $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = e^y - e^x$ et $s = e - e = 0$
   - $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = x\,e^y$ et $t = e$

4. On a donc $r\,t - s^2 = -e^2 < 0$ donc sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ la fonction g n'admet pas d'extremum local (et a fortiori global).

3 EXERCICE

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement :"deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$".
On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

- Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = p(A_n)$
- avec la convention $a_0 = 0$

3.1 Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - q\,x - p\,q$$

1. $f(x) = 0$ est une équation du second dégré qui a pour discriminant : $\Delta = q^2 + 4pq > 0$

   Donc elle a deux racines distinctes : $r_1 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$ (pour que $r_1 < r_2$)

   - $r_1 + r_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = q$
   - $r_1 \times r_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{q^2-\sqrt{\Delta}^2}{4} = \frac{q^2-\Delta}{4} = \frac{q^2-q^2-4pq}{4} = -p\,q$

2. A voire la suite (valeurs intermédiaires) , on détermine les signes :

   - $f(1) = 1 - q - p\,q = p - p\,q = p(1-q) = p^2 > 0$
   - $f(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1-p) = 1 + q^2 > 0$
   - $f(0) = -p\,q < 0$

3. Comme f est continue et que $0 \in]f(0), f(-1)[$ alors il existe $x \in]-1, 0[$ tel que $f(x) = 0$ et de même il existe $x \in]0,1[$ tel que $f(x) = 0$.

   Comme $f(x) = 0$ n'a pour racines que r_1 et r_2 alors $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$

   Variante : le tableau de variation de f est :

x		r_1				r_2	
$f(x)$	$+\searrow$	0	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow +$

   comme $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ et $f(-1) > 0$ on a par exclusion : $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$

   Donc $|r_2| < 1$ et $|r_1| < 1$

Enfin, comme $r_2 > 0$ et $r_1 < 0$: $|r_2| = r_2$ et $|r_1| = -r_1$

Et comme $q > 0$: $-r_1 = \frac{\sqrt{\Delta}-q}{2} < \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = r_2$

Conclusion : $\boxed{|r_1| < |r_2| < 1}$

3.2 Equivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. On décompose les événements pour calculer leurs proabbiltiés en notant P_1P_2 pour $P_1 \cap P_2$

   - On a $a_1 = p(A_1) = p(P_1P_2) = p(P_1)p(P_2)$ car les lancers sont indépendants. Donc $a_1 = p^2$
   - $A_2 =$"premier PP au 2° lancer" on a alors $P_2 \cap P_3$ et on ne peut pas avoir P_1 (sinon on a A_1 et pas A_2)
     Donc $A_2 = F_1P_2P_3$ et $a_2 = p(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = q\,p^2$
   - Si A_3 alors P_3P_4. Si on a P_1 il faut alors F_2 sinon on a A_1. Si on a F_1 alors il faut F_2 sinon on a A_2
     Donc $A_3 = (P_1F_2P_3P_4) \cup (F_1F_2P_3P_4)$ incompatibles et
     $a_3 = p(P_1F_2P_3P_4) + p(F_1F_2P_3P_4) = pqp^2 + q^2p^2 = qp^3(p+q) = qp^3$

2. Pour la réalisation de A_{n+2} :

   - ou bien on a P_1 auquel cas i lne faut pas avoir P_2 sinon on a A_1.
     Donc on a alors F_2 et il faut le premier PP n lancers pus tard (i.e. A_n est réalisé)

   ou

   - on a F_1 et le premier PP doit intervenir $n+1$ lancers plus tard (i.e.A_{n+1} est réalisé.)

   Donc $p(A_{n+2}) = p(P_1F_2)p(A_n) + p(F_1)p(A_{n+1})$

   car premier PP n lancers pus tard est indépendant de P_1F_2 et e premier PP doit intervenir $n+1$ lancers plus tard est indépendant de F_1

   D'où $a_{n+2} = q\,a_{n+1} + p\,q\,a_n$ et $a_{n+2} - q\,a_{n+1} - p\,q\,a_n = 0$ qui est encore vraie pour $n = 0$ $(a_2 - qa_1 - p\,q\,0 = 0)$

3. Ecrire un programme, en langage Pascal, permettant de calculer a_n, l'entier n, les réels p et q étant donnés par l'utilisateur.

   On a, pour $n \geq 1$: $a_{n+2} = q\,a_{n+1} + p\,q\,a_n$

   Donc les termes vont pouvoir être calculés par récurrence à partir de a_3, en fonction des deux précédents :

   La difficulté vient de ce qu'il faut avoir les deux précédents pour calculer le suivant :

```
Program suite;
var a,b,c,p,q:real;n,k:integer;
begin
writeln('p, n ?');readln(p,n); q:=1-p;
a:=0; {a0}
b:=p*p; {a1}
if n=0 then wrtilen(a);
```

```
if n=1 then wrtilen(b);
if n>=2 then for k:=2 to n do {on calcule de a2 à an}
begin
     c:=q*b+p*q*a; {an+2}
     a:=b; {an pour n+1 au lieu de n :  an+1}
     b:=c; {an+1 pour n+1 au lieu de n :  an+2 }
end;
writeln(b);
end.
```

4. La suite a est récurente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équationcaractéritique est : $x^2 - q\,x + pq = 0$ qui a pour racines r_1 et r_2
   Donc pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \alpha\, r_1^n + \beta\, r_2^n$ avec α et β déterminés par a_0 et a_1

   - pour $n = 0$: $\frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^0 - r_1^0\right] = 0 = a_0$
   - et pour $n = 1$: $\frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^1 - r_1^1\right] = p^2 = a_1$
   - Donc les solutions sont $\alpha = -\frac{p^2}{r_2 - r_1}$ et $\beta = \frac{p^2}{r_2 - r_1}$

   Variante : on résoud directement $\left\{\begin{array}{c} a_0 = 0 = \alpha + \beta \\ a_1 = p^2 = \alpha\, r_1 + \beta\, r_2 \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{c} \beta = -\alpha \\ p^2 = \alpha\,(r_1 - \,r_2) \end{array}\right.$
   et $\alpha = \frac{-p^2}{r_2 - r_1}$ et $\beta = \frac{p^2}{r_2 - r_1}$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1 : a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right] \text{ et également pour } n = 0}$

5. On a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right] \\ &= \frac{p^2 r_2^n}{r_2 - r_1}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

   et comme $\left|\frac{r1}{r_2}\right| < 1$ alors $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \to 0$ d'où $\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right] \to 1$ et

   Conclusion : $\boxed{a_n \sim \dfrac{p^2 r_2^n}{r_2 - r_1} \text{ lorsque } n \text{ tend vers plus l'infini.}}$

3.3 Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : \quad X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

1. On a pour tout entier n :$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\,a_{n+1} + p\,q\,a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p\,q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$
   et comme $r_1 + r_2 = q$ et $-r_1 r_2 = p\,q$ on a bien alors
   $$X_{n+1} = A\,X_n$$

2. $A - r_1 I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$ et comme la seconde colonne est $-r_1$ la première, elles sont liées et la matrice est non inversible.
   $A - r_2 I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$ et comme la seconde colonne est $-r_2$ la première, elles sont liées et la matrice est non inversible.

3. Donc r_1 et r_2 sont valeurs propres de A.

   Comme elles sont distinctes et que A est de taille 2 alors A est diagonalisable.

4. Au vu de la suite, on se doute que P est la matrice de passage et on test donc ses colonnes comme colonnes propres :
   $\begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^2 \\ r_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc elle est colonne propre associée à r_1
   $\begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2^2 \\ r_2 \end{pmatrix} = r_2 \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc elle est colonne propre associée à r_2
   Donc la concaténation de ces 2 colonnes propres associées à des valeurs propres distinctes fomre une matrice inversible
   et $A = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$

   On calcule P^{-1}, par Gauss :

   $$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - r_1 L_1 \end{matrix}$$
   $$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_2 - r_1 & 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2/\left(r_2 - r_1\right) \\ L_2/\left(r_2 - r_1\right) \end{matrix}$$
   $$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{r_2}{r_2 - r_1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{-r_1}{r_2 - r_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2/\left(r_2 - r_1\right) \\ L_2/\left(r_2 - r_1\right) \end{matrix}$$

   donc $P^{-1} = \dfrac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$

5. On a vu que $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$

6. Par récurrence :

   - pour $n = 0$: $P\,D^0 P^{-1} X_0 = I\,X_0 = X_0$
   - Soit $n \geq 0$ tel que $X_n = P\,D^n P^{-1} X_0$
     alors $X_{n+1} = A\,X_n = P\,D P^{-1} P\,D^n P^{-1} X_0 = P\,D\,D^n P^{-1} X_0 = P\,D^{n+1} P^{-1} X_0$
   - Donc pour tout entier n : $X_n = P\,D^n P^{-1} X_0$

7. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$ et

$$
\begin{aligned}
X_n &= PD^n \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p^2 \\ p^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_1^n p^2 \\ r_2^n p^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} \left(r_1 r_2^n - r_2 r_1^n\right) p^2 \\ \left(r_2^n - r_1^n\right) p^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dont la seconde composante est $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \left[r_2^n - r_1^n\right]$ (qui est bien le résultat trouvé précédemment)

3.4 Etude du temps d'attente du premier double pile .

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile.
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$p\left[T = n+1\right] = a_n$$

1. On calcule la somme partielle :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} p\left[T = n+1\right] &= \sum_{n=1}^{N} a_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[r_2^n - r_1^n\right] \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\sum_{n=1}^{N} r_2^n - \sum_{n=1}^{N} r_1^n\right] \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\sum_{n=0}^{N} r_2^n - 1 - \sum_{n=0}^{N} r_1^n + 1\right] \\
&\to \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{1 - r_2} - \frac{1}{1 - r_1}\right]
\end{aligned}
$$

converge car $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} p\,[T = n+1]$ converge et vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} p\,[T = n+1] &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{1}{1-r_2} - \frac{1}{1-r_1}\right] \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\frac{r_2 - r_1}{(1-r_2)(1-r_1)} \\
&= \frac{p^2}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2} \\
&= \frac{p^2}{1-q-p\,q} = \frac{p^2}{p-p\,q} \\
&= \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc T est une variable aléatoire.

2. T a une espérance si $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,p\,[T = n+1]$ est absolument convergente. (ce qui équivaut à la convergence simple puisque les valeurs de T sont toutes positives)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} (n+1)\,p\,[T = n+1] &= \sum_{n=1}^{N} (n+1)\,a_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} n\,a_n + \sum_{n=1}^{N} a_n \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\sum_{n=1}^{N} n\left[r_2^n - r_1^n\right] + \sum_{n=1}^{N} a_n \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\sum_{n=0}^{N} n\,r_2^n - 0 - \sum_{n=0}^{N} n\,r_1^n + 0\right] + \sum_{n=1}^{N} a_n \\
&\to \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2}{(1-r_2)^2} - \frac{r_1}{(1-r_1)^2}\right] + 1
\end{aligned}$$

Donc T a une espérance qui vaut

$$\begin{aligned}
E(T) &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2}{(1-r_2)^2} - \frac{r_1}{(1-r_1)^2}\right] + 1 \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{[(1-r_2)(1-r_1)]^2}\right] + 1
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
(1-r_2)(1-r_1) &= 1-(r_1+r_2)+r_1r_2 = 1-q-pq \\
&= p - pq = p(1-q) = p^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r_2\left(1-r_1\right)^2-r_1\left(1-r_2\right)^2 &= r_2\left(1-2r_1+r_1^2\right)-r_1\left(1-2r_2+r_2^2\right)\\
&= r_2-2r_1r_2+r_2r_1^2-r_1+2r_1r_2-r_1r_2^2\\
&= r_2+r_2r_1^2-r_1-r_1r_2^2\\
&= r_2-r_1+r_1r_2\left(r_1-r_2\right)\\
&= \left(r_2-r_1\right)\left(1-r_1r_2\right)\\
&= \left(r_2-r_1\right)\left(1+pq\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E\left(T\right) &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\left[\frac{r_2\left(1-r_1\right)^2-r_1\left(1-r_2\right)^2}{\left[\left(1-r_2\right)\left(1-r_1\right)\right]^2}\right]+1\\
&= \frac{p^2}{r_2-r_1}\frac{\left(r_2-r_1\right)\left(1+p\,q\right)}{p^4}+1\\
&= \frac{1+p\,q}{p^2}+1=\frac{1+pq+p^2}{p^2}\\
&= \frac{1+p\left(q+p\right)}{p^2}\\
&= \frac{1+p}{p^2}
\end{aligned}$$