Corrigé ECRICOME 2006 par Pierre Veuillez

1 EXERCICE

. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$.f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x,y) = e^x\left(x + y^2 + e^x\right)$$

1.1 Recherche d'extremum local de g.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + 2e^x > 0$

   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

   En $+\infty$: $f(x) = x + 1 + 2e^x \to +\infty$

   En $-\infty$: $f(x) = x + 1 + 2e^x \to -\infty$

2. En $-\infty$ on a : $f(x) - (x+1) = 2e^x \to 0$ donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote.

   Et comme $f(x) - (x+1)$, la courbe représentative de f est au-dessus de l'asymptote.

3. On a $f(-2) = -1 + e^{-2} < 0$ car $-2 < 0$ donc $e^{-2} < e^0$

   et $f(-1) = 0 + 2e^{-1} > 0$

   On applique alors le théorème de bijection :

   - f est continue et strictement croissante sur $[-2,-1]$
   - donc bijective de $[-2,-1]$ dans $[f(-2), f(-1)]$
   - De plus, $0 \in [f(-2), f(-1)]$

   Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur cet intervalle.

   Conclusion : $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in [-2,-1] \text{ tel que } f(\alpha) = 0}$

   N.B. qui n'était pas demandé mais qui va servir : comme f est strictement croissante, elle est strictement négative avant α et strictement positive après.

   α est donc la seule solution sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 0$

4. g est C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc si g a un extremum en (x,y) alors $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$.

   ce que l'on résout :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= e^x\left(x + y^2 + e^x\right) + e^x(1 + e^x) \\ &= e^x\left(1 + x + y^2 + 2e^x\right) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= e^x 2y \end{aligned}$$

   On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 1 + x + 2e^x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = \alpha \\ y = 0 \end{array}\right.$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Le seul point critique de } g \text{ est } (\alpha, 0)}$

5. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, g présente un extremum relatif en ce point si $rt - s^2 > 0$:

   On calcule les dérivées secondes:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = e^x\left(1+x+y^2+2e^x\right)+e^x\left(1+2e^x\right) \\ &= e^x\left(2+x+y^2+4e^x\right) \\ s &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x 2y \\ t &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2e^x \end{aligned}$$

   Donc en $(\alpha, 0)$ on a $r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha,0) = e^\alpha\left(1+2\alpha+4e^\alpha\right)$

   $s = 0$ et $t = 2e^\alpha$

   Donc $rt - s^2 = 2e^{2\alpha}\left(2+\alpha+4e^\alpha\right)$ signe ?

   et comme $-2 \leq \alpha$ on a $\left(2+\alpha+4e^\alpha\right) > 0$.

   Donc le point critique est un extremum local.

   Et comme $t > 0$

   Conclusion : $\boxed{(\alpha, 0) \text{ est un minimum local et } \beta = g(\alpha,0) = e^\alpha\left(\alpha+e^\alpha\right)}$

6. Pour prouver la relation, on dispose de $\beta = e^\alpha\left(\alpha+e^\alpha\right)$ et α vérifie $\alpha + 1 + 2e^\alpha = 0$

   Donc $\alpha = -\left(1+2e^\alpha\right)$ et $\alpha^2 = 1 + 4e^\alpha + 4e^{2\alpha}$

   Donc

$$\begin{aligned} 4\beta + \alpha^2 - 1 &= 4\alpha e^\alpha + 4e^{2\alpha} + 1 + 4e^\alpha + 4e^{2\alpha} - 1 = \\ &= 4e^\alpha\left(\alpha+1+2e^\alpha\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.2 Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 2e^x > 0$

   Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$

   Géométriquement : Comme f est convexe, la tangente en x est en dessous de la courbe représentative.

   Cette tangente a pour équation en (t,y) : $y - f(x) = (t-x)f'(x)$ ou encore $y = f(x) + (t-x)f'(x)$

   Conclusion : $\boxed{f(x) + (t-x)f'(x) \leq f(t)}$

   Analytiquement : On étudie les variations de la différence :

   $h(t) = f(t) - f(x) - (t-x)f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = f'(t) - f'(x)$ et comme f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

t		x	
$h'(t)$	$- \nearrow$	0	$\nearrow +$
$h(t)$	$+ \searrow$	0	$\nearrow +$

   Donc $h(t) \geq 0$ et $f(x) + (t-x)f'(x) \leq f(t)$

2. On utilise l'inégalité précédente avec u_n et α... Qui est qui ?

   dans u_{n+1} on retrouve $f'(u_n)$. Donc $x = u_n$ et $t = \alpha$

   $f(u_n) - (\alpha - u_n) f'(u_n) \leq f(\alpha) = 0$ donc $f(u_n) \leq (\alpha - u_n) f'(u_n)$ et comme $f' > 0$

   $\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \alpha - u_n$ et $u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \geq \alpha$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_{n+1}}$

   Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(\alpha) = 0$, sr $[\alpha, +\infty[$ on a $f(x) \geq 0$

   Comme $u_n \geq \alpha$ pour $n \geq 1$ et également pour $n = 0$, $(-1 \geq \alpha)$

   alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq 0$

   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } u \text{ est décroissante}}$

   Enfin, comme la suite est décroissante, on a pour tout entier n : $u_0 \geq u_n$ et finalement :

   Conclusion : $\boxed{\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1}$

3. La suite u est décroissante et minorée par α.

   Elle converge donc vers une limite $\ell \geq \alpha$.

   Comme $x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ $(f'(x) \neq 0)$, elle est continue en ℓ et donc $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$

   Donc $f(\ell) = 0$ et $\ell = \alpha$

   Conclusion : $\boxed{u_n \to \alpha \text{ quand } n \to +\infty}$

4. On admet que pour tout x de l'intervalle$[-2, -1]$:

$$0 \leq (x - \alpha) f'(x) - f(x) \leq \frac{(x - \alpha)^2}{e}$$

   a) Comme $u_n \in [-2, -1]$, l'inégalité précédente donne :

$$0 \leq (u_n - \alpha) f'(u_n) - f(u_n) \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$

   et en divisant par $f'(u_n) > 0$:

$$0 \leq u_n - \alpha - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{f'(u_n)\, e}$$

   Enfin, $f'(x) = 1 + 2e^x \geq 1$ donc $\dfrac{1}{f'(u_n)} \leq 1$ et en multipliant par $\dfrac{(u_n - \alpha)^2}{e} \geq 0$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \qquad 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{e}}$

   b) On procède alors par récurrence :

   - $\dfrac{1}{e^{2^0 - 1}} = \dfrac{1}{e^0} = 1$ et comme $-2 \leq \alpha \leq -1$ alors $0 \leq -1 - \alpha \leq 1$

     Donc $0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{e^{2^0 - 1}}$

   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{e^{2^n - 1}}$

     alors $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{e} \leq \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{1}{e^{2^n - 1}}\right)^2 = \dfrac{1}{e^{2 \cdot 2^n - 2 + 1}} = \dfrac{1}{e^{2^{(n+1)} - 1}}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \qquad 0 \le u_n - \alpha \le \frac{1}{e^{2^n-1}}}$

5. Comme $0 \le u_n - \alpha \le \dfrac{1}{e^{2^n-1}}$,alors u_n donne une valeur approchée de α à $\dfrac{1}{e^{2^n-1}}$ près.

   Il faut donc calculer les valeurs de u_n jusqu'à ce que $\dfrac{1}{e^{2^n-1}} \le 10^{-p}$

6. On peut calculer séparément la valeur de $10^{-p} = \exp(-p * \ln(10))$ et celle de $\dfrac{1}{e^{2^n-1}}$ en calculant 2^n par `p:=1; .....p:=2*p` dans la boucle, ou résoudre cette inégalité :

   $\dfrac{1}{e^{2^n-1}} \le 10^{-p} \iff -2^n + 1 \le -p\ln(10) \iff 2^n \ge p\ln(10) + 1$

   $\iff n \ge \ln(p\ln(10)+1)/\ln(2)$ car $\ln(2)$ par lequel on divise est positif.

   D'où le programme :

```
Program suite;
var n,p:integer;u,nmax:real;
function suivant(x:real):real;
begin suivant:=x+(x+1+2*exp(x))/(1+2exp(x))
end;
begin
     nmax:=trunc(ln(p*ln(10)+1)/ln(2));
     Writeln('p?');readln(p);
     u:=-1;
     for n:=1 to nmax do u:=suivant(u);
     writeln(u);
end.
```

   N.B. le fait de calculer `nmax` évite de refaire le calcul à chaque passage de la boucle, et gagne donc du temps à l'exécution

   (imperceptible avec les ordinateurs actuels, mais c'est plus propre quand même)

2 EXERCICE

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. On calcule le quotient :

$$\begin{aligned}
\frac{f_n(x)}{1/x^2} &= x^{n-2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^{n-2}}{\exp(x^2/2)} \\
&= \exp\left(-\frac{x^2}{2} + (n-2)\ln(x)\right) \\
&= \exp\left[x^2\left(-\frac{1}{2} + (n-2)\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Et comme $\ln(x) = o(x^2)$ alors $() \to -\frac{1}{2}$: $[] \to -\infty$ et $\exp[] \to 0$

Conclusion : $\boxed{f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \text{ en } +\infty}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est impropre en $+\infty$

   Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente (Riemann) alors par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge également.

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$

   a) On a $\int_0^A f_{n+2}(x)\,dx = \int_0^A x^{n+2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$
   Pour diminuer la puissance, on va la dériver.
   Mais,on ne peut pas primitiver le $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ seul. Il faut y adjoindre un x (dérivée du contenu)
   $v'(x) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$: $u(x) = x^{n+1}$: $v(x) = -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$: $u'(x) = (n+1)x^n$
   comme u et v sont de classe C^1 :

$$\begin{aligned}\int_0^A f_{n+2}(x)\,dx &= \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)x^{n+1}\right]_0^A - \int_0^A -(n+1)x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right)A^{n+1} + 0 + (n+1)\int_0^A x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &\to (n+1)\int_0^{+\infty} x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \text{ quand } A \to +\infty\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{I_{n+2} = (n+1)I_n}$

   b) On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = 1$ et par parité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}$
   Donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ et
   Conclusion : $\boxed{I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

   c) On a $I_1 = \int_0^{+\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$
   On calcule l'intégrale partielle :

$$\begin{aligned}\int_0^A x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx &= \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^A \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \to 1\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{I_1 = 1}$

   d) On procède alors par récurrence :
   Pour $n = 0$ on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\cdot 0)!}{2^0 0!} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} = I_0 \\ 2^0 0! &= 1 = I_1\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} &= 2^n n! \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= I_{2n+2} = (2n+1)\, I_{2n} = (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(2n+2)\, 2^n n!} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{2 \cdot 2^n\,(n+1)\, n!} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!} \\ I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = (2n+2)\, I_{2n+1} = (2n+2)\, 2^n n! \\ &= 2\,(n+1)\, 2^n n! = (n+1)! 2^{n+1} \end{aligned}$$

Donc les relations sont vraies pour tout entier n.

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   a) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$
   $\int_{-\infty}^{0} f = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$ et $\int_{0}^{+\infty} f = \int_{0}^{+\infty} f_1 = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1
   Donc f est une densité de probabilité.

   b) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.

      i. On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$:
      $\int_{-\infty}^{0} t f(t)\, dt = 0$
      $\int_{0}^{+\infty} t f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} t^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dt = \int_{0}^{+\infty} f_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2!}{2^1 1!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
      Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X \text{ a une espérance et } E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

      ii. On étudie l'espérance de X^2 : (absolument convergence $\Longleftrightarrow$ convergente car tout est positif)
      $\int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)\, dt = 0$
      $\int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dt = \int_{0}^{+\infty} f_3 = 2^1 1! = 2$
      Donc $E(X^2) = 2$.
      Enfin, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$
      Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X \text{ a une variance et } V(X) = 2 - \frac{\pi}{2}}$

5. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives de X et de $Y = X^2$

   a) On a $G(x) = \mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}(X^2 \leq x)$

- Pour $x \geq 0$: $(X^2 \leq x) = (|X| \leq \sqrt{x}) = (-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$
  Et comme $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}$: $\mathrm{G}(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$
- Pour $x < 0$: $(X^2 \leq x) = \emptyset$ donc $G(x) = 0$

b) On vérifie les critères de fonctions de répartition de variable à densité :
Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, (fonction de répartition de variable à densité) alors G est continue sur $[0, +\infty[$
G est également continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle)
En 0^- : pour $x < 0$, $G(x) = 0 \to 0$ et $G(0) = F\left(\sqrt{0}\right) - F\left(-\sqrt{0}\right) = 0$
Donc G est continue en 0^-
Conclusion : $\boxed{\text{Donc } G \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
Comme F est de classe C^1 sur là où f est continue, F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (en fait, f est aussi continue en 0)
Donc G est C^1 en $x \geq 0$ tel que en x tel que $\sqrt{x} \neq 0$ et $-\sqrt{x} \neq 0$ donc sur $]0, +\infty[$.
Et G est C^1 sur $]-\infty, 0[$
Conclusion : $\boxed{G \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$
Donc G est une fonction de répartition de variable à densité.
Un densité est $g(x) = G'(x) = 0$ si $x \leq 0$ (valeur en 0 arbitraire)et pour $x > 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} F'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} F'\left(-\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\sqrt{x} e^{-x/2} + 0\right] \text{ car } -\sqrt{x} < 0 \\ &= \frac{1}{2} e^{-x/2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Et on reconnaît que } Y \hookrightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)}$

Conclusion : $\boxed{E(Y) = 2 \text{ et } V(Y) = 4}$

3 EXERCICE.

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

3.1 Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad Q(x) = (x-1) P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ :} \qquad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. On peut faire par étape :
   f est définie sur E car toute fonction polynôme est dérivable.

Soit P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

P' sera de degré inférieur ou égal à 1. et $x \to (x-1)P'(x) + P(x)$ sera un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Donc f est une application de E dans E.

Pour la linéarité :

Soient P et R de E et α et β réels,

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta R)(x) &= (x-1)(\alpha P + \beta R)'(x) + (\alpha P + \beta R)(x) \\ &= (x-1)\alpha P'(x) + (1-x)\beta R'(x) + \alpha P(x) + \beta R(x) \\ &= \alpha f(P)(x) + \beta f(R)(x) \end{aligned}$$

Donc $f(\alpha P + \beta R) = \alpha f(P)(x) + \beta f(R)(x)$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$

On peut aussi faire plus rapide :

Soit $P \in E : P(x) = a + bx + cx^2$

Alors $f(P)$ est définie et $f(P)(x) = (x-1)(b+2cx) + a + bx + cx^2 = a - b + (2b-2c)x + 3cx^2$

Donc $f(P)$ est un polynôme de E.

et $f(P)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a-b \\ 2b-2c \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Donc f est l'endomorphisme de E associé à A dans la base canonique.

Donc f est un endomorphisme de E et sa matrice est A.

2. On calcule les images des vecteurs de la base canonique, et leurs coordonnées.
   $P(x) = 1$ alors $P'(x) = 0$ et $f(P)(x) = P(x) = 1$ (coordonnées $(1,0,0)$)
   $P(x) = x$ alors $P'(x) = 1$ et $f(P)(x) = (x-1) + x = 2x - 1$ (coordonnées $(-1,2,0)$)
   $P(x) = x^2$ alors $P'(x) = 2x$ et $f(P)(x) = (x-1)2x + x^2 = 3x^2 - 2x$ (coordonnées $(0,-2,3)$)
   Donc la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, est :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont sur la diagonale.
   Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont donc } 1,\ 2 \text{ et } 3.}$
   Comme f a trois valeurs propres distinctes, $\boxed{\text{elle est diagonalisable.}}$
   Comme aucune valeur propre n'est nulle, f est bijective et $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$

4. On a
   $$\text{pour tout réel } x : \qquad R_0'(x) = 0,\ R_1'(x) = 1 \text{ et } R_2(x) = 2(x-1)$$
   donc
   $$\begin{aligned} f(R_0)(x) &= 0 + 1 = 1 \\ f(R_1)(x) &= (x-1) + x - 1 = 2(x-1) \\ f(R_2)(x) &= (x-1)2(x-1) + (x-1)^2 = 3(x-1)^2 \end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{f(R_0) = R_0 : f(R_1) = 2R_1 : f(R_2) = 3R_2}$

5. Comme les trois sont non nuls, ce sont des vecteurs propres associés.

   Ils sont associés à des valeurs propres distinctes, donc ils forment une famille libre.

   Ils sont trois.

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2) \text{ est une base de vecteurs propres de } f.}$

   On a leurs coordonnées dans la base canonique :

   $R_0(x) = 1$: coordonnées $(1, 0, 0)$

   $R_0(x) = x - 1$: coordonnées $(-1, 1, 0)$

   $R_2(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x = 1$: coordonnées $(1, -2, 1)$

   Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. on vérifie pour tout réel x :

$$\begin{aligned} R_2 x + 2R_1(x) + R_0(x) &= x(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = x^2 = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) &= (x-1) + 1 = P_1(x) \end{aligned}$$

   Donc P_2 a pour coordonnées $(1, 2, 1)$ dans $\mathcal{B}'$

   P_1 a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ et enfin $P_0 = R_0$ a pour coordonnés $(1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}'$.

   Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (ce que l'on vérifie en calculant le produit $P^{-1}P = I$)

7. La formule de changement de base donc alors $A = PDP^{-1}$ et $A^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1}$

   Conclusion : $\boxed{A^{-1} = PDP^{-1}}$

   N.B. : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, l'ordre du produit s'inverse !

   On a alors par récurrence

   - Pour $n = 0$: $P[D^{-1}]^0 P^{-1} = I = A^0$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $[A^{-1}]^n = P[D^{-1}]^n P^{-1}$
     alors $[A^{-1}]^{n+1} = A[A^{-1}]^n = PDP^{-1}P[D^{-1}]^n P^{-1} = P[D^{-1}]^{n+1} P^{-1}$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } n : [A^{-1}]^n = P[D^{-1}]^n P^{-1}}$

   la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$ est issue du produit par la troisième colonne de P^{-1}.

   On connaît les puissance de D car D est diagonale.

$$
\begin{aligned}
\left[A^{-1}\right]^n &= P\left[D^{-1}\right]^n \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \\ \dots & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \\ \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \cdot 2^{-n} \\ \dots & 3^{-n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dots & 1 - 2 \cdot 2^{-n} + 3^{-n} \\ \dots & 2 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 3^{-n} \\ \dots & 3^{-n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.2 Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve $(k \geq 0)$
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathrm{P}\left[X_k = 0\right] \\ \mathrm{P}\left[X_k = 1\right] \\ \mathrm{P}\left[X_k = 2\right] \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{P}\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.
On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Les valeurs possibles de X_2 sont $\{0, 1, 2\}$

   - $(X_2 = 0) = (20 \cup 10 \cup 00)$ en notant 20 obtenir 2 au premier tirage et 0 au second.
     Les trois sont incompatibles donc
     $\mathrm{P}(X_2 = 0) = \mathrm{P}(20) + \mathrm{P}(10) + \mathrm{P}(00)$
     $\mathrm{P}(20) = \mathrm{P}(2_1)\, \mathrm{P}_{2_1}(0_2) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}$ car quand on a tiré 2, il reste 0,1,2 pour le second tirage.
     $\mathrm{P}(10) = \mathrm{P}(1_1)\, \mathrm{P}_{1_1}(0_2) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}$ car quand on a tiré 1, il reste 1,2 pour le second tirage.
     et $\mathrm{P}(00) = \mathrm{P}(0_1)\, \mathrm{P}_{0_1}(0_2) = \frac{1}{3}1$
     Donc $\mathrm{P}(X_2 = 0) = \frac{11}{18}$
   - $(X_2 = 1) = (21 \cup 11)$ car pour avoir 1 au second, il doit être encore dans l'urne.
     Il faut donc avoir tiré 1 ou plus au premier.
     $\mathrm{P}(21) = \mathrm{P}(2_1)\, \mathrm{P}_{2_1}(1_2) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}$
     $\mathrm{P}(11) = \mathrm{P}(1_1)\, \mathrm{P}_{1_1}(1_2) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}$
     Donc $\mathrm{P}(X_2 = 1) = \frac{5}{18}$

- Enfin $(X_2 = 2) = (22)$
  donc $\mathrm{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

i	0	1	2	
$\mathrm{P}(X_2 = i)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	1
$i\mathrm{P}(X_2 = i)$	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$E(X_2) = \frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{E(X_2) = \frac{1}{2}}$

2. $(X_k = 0, X_k = 1, X_k = 2)$ forme un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{k+1} = 0) &= \mathrm{P}_{X_k=0}(X_{k+1} = 0)\,\mathrm{P}(X_k = 0) + \mathrm{P}_{X_k=1}(X_{k+1} = 0)\,\mathrm{P}(X_k = 1) \\
&\quad + \mathrm{P}_{X_k=2}(X_{k+1} = 0)\,\mathrm{P}(X_k = 2) \\
&= \mathrm{P}_{\text{reste}\{0\}}(0)\,\mathrm{P}(X_k = 0) + \mathrm{P}_{\text{reste}\{0,1\}}(0)\,\mathrm{P}(X_k = 1) + \mathrm{P}_{\text{reste}\{0,1,2\}}(2)\,\mathrm{P}(X_k = 2) \\
&= 1\mathrm{P}(X_k = 0) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_k = 1) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_k = 2) \text{ et de même} \\
\mathrm{P}(X_{k+1} = 1) &= 0\mathrm{P}(X_k = 0) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_k = 1) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_k = 2) \\
\mathrm{P}(X_{k+1} = 2) &= 0\mathrm{P}(X_k = 0) + 0\mathrm{P}(X_k = 1) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_k = 2)
\end{aligned}$$

On a donc

$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} U_k$$

et on vérifie que cette matrice A' est l'inverse de A en calculant leur produit :

$$A' \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N} : U_{k+1} = A^{-1}U_k}$

3. La suite U est donc géométrique de raison A^{-1} et

   Conclusion : $\boxed{U_k = [A^{-1}]^k\, U_0}$

4. Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(A^{-1})^k\, U_0$ donne la troisième colonne de $[A^{-1}]^k$ donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[X_k = 0] &= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{3^n} \to 1 \\
\mathrm{P}[X_k = 1] &= \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \to 0 \\
\mathrm{P}[X_k = 2] &= \frac{1}{3^n} \to 0
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.