1 Exercice

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

1.1 Etude des variations de la fonction f_a

1. En $+\infty$: $f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \to +\infty$ car $a > 0$.
   et on a $f_a(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{a^2}{t}$ donc une asymptote d'équation $y = \frac{1}{2}t$ car $\frac{1}{2}\frac{a^2}{t} \to 0$ en $+\infty$.
   Et comme $\frac{1}{2}\frac{a^2}{t} > 0$ alors la courbe représentative de f_a est au dessus de l'asymptote.
2. En 0^+ : $f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \to +\infty$.
   Et on a donc une asymptote verticale d'équation $t = 0$.
3. f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'_a(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{t^2 - a^2}{t^2}$$

t	0		a		$+\infty$
$t^2 - a^2$		$-$	0	$+$	2^{nd} degré
$f'_a(t)$		$-$	0	$+$	
$f_a(t)$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme f_a est minimum en a alors
   Conclusion : $\boxed{\forall t > 0 : f_a(t) \geq f_a(a) = a}$

1.2 Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Dans le cas où $u_0 = a$, comme $f_a(a) = a$, on aura (par récurrence), $u_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. On a $f'_a(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{t^2}$ et comme $\frac{a^2}{t^2} > 0$ alors $f'_t(t) < \frac{1}{2}$
   et pour tout $t > a$: $f'_a(t) > 0$
   Conclusion : $\boxed{\forall t > a : 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}}$
3. Par récurrence :
   - $u_1 \geq f_a(u_0) \geq a$ car $f_a(t) \geq a$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$
   - Soit $n \geq 1$ tel que $u_n \geq a$ alors $f_a(u_n) \geq f_n(a)$ car f_n est strictement croissante sur $[a, +\infty[$ et que u_n et a en sont éléments.
     et $u_{n+1} \geq a$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq a}$
4. On utilise alors l'inégalité des accroissements finis, soit avec la valeur absolue et en s'en débarrassant ensuite, soit sans la valeur absolue :
   - $\forall t \geq a : 0 \leq f'_a(t) \leq \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq a$ donc $0 \cdot (u_n - a) \leq f_a(u_n) - f_n(a) \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$

– $\forall t \geq a : 0 \leq f_a'(t) \leq \frac{1}{2}$ donc $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$ et $|f_a(u_n) - f_a(a)| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$ et comme $u_n - a \geq 0$ alors $|u_n - a| = u_n - a$

(la première est plus cohérente avec l'énoncé qui ne demande qu'ensuite la valeur absolue)

Conclusion : $\boxed{0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)}$

et comme $u_n - a \geq 0$ alors $|u_n - a| = u_n - a$ et par récurrence :

– $|u_1 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$

– Soit $n \geq 1$ tel que $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ alors $|u_{n+1} - a| = u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$
donc $|u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1 : |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|}$

5. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$ et par encadrement ($0 \leq |u_n - a|$) $|u_n - a| \to 0$

   Conclusion : $\boxed{u_n \to a \text{ quand } n \to +\infty}$

6. La suite précédente convergera vers $\sqrt{2}$ si $a = \sqrt{2}$ et $a^2 = 2$

   Avec $u_0 = 1$. On affiche les termes de u_0 à u_{99}.

```
program racine ;
var i :integer ; u :real ;
begin
     u :=1 ;
     for n :=0 to 99 do
     begin writeln('indice ', n, ' :',u) ;  u :=(u+2/u)/2 end ;
end.
```

1.3 Recherche d'exteremum d'une fonction à deux variables.

On considère sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$$

1. g est de classe C^2 sur l'ouvert U et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{1 + y}{2}\left[-\frac{1}{x^2}(1 + x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] \\
&= \frac{1 + y}{2}\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right] = \frac{(1 + y)(y - x^2)}{2x^2 y} \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{(1 + x)}{2}\left[\frac{-1}{y^2}(1 + y) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] \\
&= \frac{(1 + x)}{2}\left[\frac{-1}{y^2} + \frac{1}{x}\right] = \frac{(1 + x)(x - y^2)}{2y^2 x} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1 + y}{x^3} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + (1 + y)\frac{-1}{y^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right] \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{1 + x}{y^3}
\end{aligned}$$

2. Sur l'ouvert U, les points critiques sont déterminés par $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(1+y)(y-x^2)=0\\ (1+x)(x-y^2)=0\end{array}\right.$

   Comme $x>0$ alors $x\neq -1$ et de même $y\neq -1$ et $\left\{\begin{array}{l}y-x^2=0\\ x-y^2=0\end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{c}y=x^2\\ x-x^4=0\end{array}\right.$

   On a $x-x^4=x(1-x^3)=x(1-x)(1+x+x^2)$

   $1+x+x^2$ a pour discriminant $\Delta=1-4<0$ donc $1+x+x^2>0$ et la seule solution est $x=1$ (car $x\neq 0$) et donc $y=1$

   Conclusion : $\boxed{\text{Le seul point critique est } (1,1)}$

   On a en ce point

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1)=2\\ s &= \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(1,1)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1}-\frac{1}{1}\right]=-1\\ t &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1)=2 \end{aligned}$$

   donc $rt-s^2=4-1>0$ et $r>0$ donc

   Conclusion : $\boxed{g \text{ a un minimum local en } (1,1) \text{ où il vaut } g(1,1)=4}$

3. On vérifie :

$$\begin{aligned} 1+f_1(x)+f_1(y)+f_1\left(\frac{x}{y}\right) &= 1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\\ g(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x+y+xy)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+1+\frac{y}{x}+y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+1+x\right)\\ &= 1+f_1(x)+f_1(y)+f_1\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

   et l'égalité est bien vérifiée.

4. Comme $f_1(t)\geq 1$ pour tout $t>0$ on a alors $f_1(x)\geq 1$ et $f_1(y)\geq 1$ et $f_1\left(\frac{x}{y}\right)\geq 1$

   et donc $g(x,y)\geq 4=g(1,1)$ pour tout x et $y>0$.

   Conclusion : $\boxed{g \text{ a un minimum global en } (1,1)}$

2 EXERCICE

La matrice A étant donnée

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$$

on définit l'application ϕ_A par

$$\begin{array}{rccc}\phi_A: & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_2(\mathbb{R})\\ & M & \longmapsto & \phi_A(M)=AM-MA\end{array}$$

2.1 Diagonalisation de A.

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = A$.

   Donc si α est valeur propre de A alors $\alpha^2 = \alpha$ donc $0 = \alpha^2 - \alpha = \alpha(1-\alpha)$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc si } \alpha \text{ est valeur propre de } A \text{ alors } \alpha = 0 \text{ ou } 1}$

2. On vérifie qu'elles sont bien valeurs propres :

   – Pour $\alpha = 0$: $(A - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 0 = 0 \end{cases}$

   Donc 0 est valeur propre de A est le sous espace propre associé est $E_0 = \text{Vect}((1,3))$

   – Pour $\alpha = 1$: $(A - 1I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 0 = 0 \end{cases}$

   Donc 1 est valeur propre de A est le sous espace propre associé est $E_0 = \text{Vect}((1,2))$

   Conclusion : $\boxed{A \text{ d'ordre 2 a deux valeurs propres distinctes est diagonalisable}}$

   de plus $((1,3),(1,2))$ forme une base de vecteurs propres.

   Donc avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a P inversible et $A = P\ D\ P^{-1}$ (la première colonne de P est bien nulle)

   On calcule P^{-1} par Gauss :

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 - 3L_1$

   $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ -L_2 \end{matrix}$

   $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}$

   et on test au brouillon $P \cdot P^{-1} = I$

2.2 Diagonalisation de ϕ_A

1. ϕ_A est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Et pour toutes matrices M et N réels α et β :

$$\begin{aligned} \phi_A(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - M(\alpha M + \beta N) \\ &= \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA) \\ &= \alpha\phi_A(M) + \beta\phi_A(N) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\phi_A \text{ est une endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

2. Est ce que $\phi_A^3 - \phi_A$ est elle l'application nulle ?.Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \phi_A^2(M) &= \phi_A(\phi_A(M)) \\ &= A(AM - MA) - (AM - MA)A \\ &= A^2M - AMA - AMA + MA^2 \\ &= AM - 2AMA + MA \text{ car } A^2 = A \\ \phi_A^3(M) &= A(AM - 2AMA + MA) - (AM - 2AMA + MA)A \\ &= A^2M - 2A^2MA + AMA - \left(AMA - 2AMA^2 + MA^2\right) \\ &= AM - 2AMA + AMA - AMA + 2AMA - MA \\ &= \phi_A(M) \end{aligned}$$

Donc $\left(\phi_A^3 - \phi_A\right)(M) = 0$ pour tout M et

Conclusion : $\boxed{X^3 - X \text{ est polynôme anulateur de } \phi_A}$

Donc si α est valeur propre de ϕ_A alors $\alpha^3 - \alpha = 0$ et $(\alpha^2 - 1)\,\alpha = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeur propres possibles de } \phi_A \text{ sont : } 0,\ 1 \text{ et } -1}$

3. Soit M non nulle.

   M est un vecteur prope de ϕ_A associé à a valeur propre λ

   $\iff \phi_A(M) = \lambda M \iff AM - MA = \lambda M$

   $\iff P\ D\ P^{-1}M - M\ P\ D\ P^{-1} = \lambda M$

   $\iff D\ P^{-1}M\ P - P^{-1}M\ P\ D = \lambda P^{-1}M\ P$

   $\iff D\ N - N\ D = \lambda N$ avec $P^{-1}M\ P = N$

4. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   a) On a :

$$\begin{aligned} DN - ND &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc $DN - ND = 0 \iff b = c = 0$

   Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble est } \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\ /\ a, d \in \mathbb{R}\right\}}$

   b) $M \in \ker(\phi_A) \iff AM - MA = 0 \iff DN - ND = 0$ avec $N = P^{-1}MP$ ou PNP^{-1}

   (la matrice nulle vient en plus des vecteurs propres)

   Donc $\ker(\phi_A) = \left\{P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}\ /\ a, d \in \mathbb{R}\right\}$

   et

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} &= P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2a & a \\ 3d & -d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a + 3d & a - d \\ -6a + 6d & 3a - 2d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} \ker(\phi_A) &= \left\{\begin{pmatrix} -2a + 3d & a - d \\ -6a + 6d & 3a - 2d \end{pmatrix}\ /\ a, d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

   Donc la famille (A, M_1) est génératrice de $\ker \phi_A$ et elle est libre (2 matrices non colinéaires)

   Conclusion : $\boxed{(A, M_1) \text{ est une base du sous espace propre associé à } 0}$

c) On vérifie que 1 est valeur propre en recherchant les matrice N vérifiant

$$\begin{aligned} D\ N - N\ D = N &\iff \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff a = b = d = 0 \end{aligned}$$

Il existe donc des solutions non nulles.
Donc 1 est valeur propre et les matrice N associées sont $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$
Pour -1 :

$$\begin{aligned} D\ N - N\ D = -N &\iff \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \\ &\iff a = c = d = 0 \end{aligned}$$

Donc -1 est valeur propre et les matrice N associées sont $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec$cb \in \mathbb{R}$

d) Les sous espaces propres associés sont donc :
pour 1 : $E_1 = \left\{\left\{P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} P^{-1}\ /, d \in \mathbb{R}\right\}\right\}$

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2c & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2c & c \\ -4c & 2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right)$ en est une base (un vecteur non nul)
pour -1 :

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= P \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3b & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3b & -b \\ 9b & -3b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\right)$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} 1 \text{ est valeur propre et } \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right) \text{ base de } E_1 \\ -1 \text{ est valeur propre et } \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\right) \text{ base de } E_{-1} \end{array}}$

5. Les sous espaces propres de ϕ_A sont donc de dimensions 2 (E_0) 1 (E_1) et 1 (E_{-1})
Donc la somme de ces dimensions est 4. Et comme $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 2 \times 2 = 4$ alors
Conclusion : $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

3 Exercice

3.1 Mode de paiement de la clientèle.

1. S vaut 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 € et 1 sinon.
   U vaut 0 si le règlement se fait par carte bancaire et 1 sinon.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S=0\cap U=0) &= 0,4 \\ \mathrm{P}(S=.0\cap U=1) &= 0,3 \\ \mathrm{P}(S=1\cap U=0) &= 0,2 \\ \mathrm{P}(S=1\cap U=1) &= 0,1 \end{aligned}$$

   a) On a la loi du couple et les lois de S et U sont les lois marginales :

$k\backslash h$	0	1	$\mathrm{P}(S=k)$
0	$0,4$	$0,3$	$0,7$
1	$0,2$	$0,1$	$0,3$
$\mathrm{P}(U=k)$	$0,6$	$0,4$	

   Donc $S \hookrightarrow \mathcal{B}(0,3)$ et $U \hookrightarrow \mathcal{B}(0,4)$
   Et la probabilité qu'un client règle par carte est $p = \mathrm{P}(U=0) = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

   b) On a $\mathrm{Cov}(S,U) = E(SU) - E(S)E(U)$
   avec $E(SU) = 0 + 1\mathrm{P}(S=1\cap U=1) = 0,1$
   $E(S) = 0,3$ et $E(U) = 0,4$
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{Cov}(S,U) = -0,02 \neq 0 \text{ donc } S \text{ et } U \text{ sont dépendantes.}}$

   c) La probabilité que la somme réglée soit strictement supérieur à 50€ sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire est $\mathrm{P}_{U=1}(S=1) = \dfrac{\mathrm{P}(S=1\cap U=1)}{\mathrm{P}(U=1)} = \dfrac{0,1}{0,4} = \dfrac{1}{4}$

2. Les règlements sont indépendants entre clients.
   Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$)
   C_n comptabilise le nombre de clients payant par carte bancaire
   L_1 est égal au rang du 1^{er} client utilisant sa carte bancaire s'il y en a au moins un et zéro sinon de même L_2 pour le second.

   a) C_n est le **nombre de** client payant **indépendamment** par carte parmi **n** clients chacun avec la **probabilité p** $= \dfrac{3}{5}$
   Conclusion : $\boxed{C_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{5}\right)}$

   b) **Attention :** ressemble à une géométrique (premier succès) mais en un nombre donné d'expérience !
   On revient à la définition :
   $L_1(\Omega) = [[0,n]]$ et
   $(L_1 = 0) =$ carte jamais utilisée $= (C_n = 0)$ donc $\mathrm{P}(L_1 = 0) = (1-p)^n$
   En notant K_i "le $i^{ème}$ utilise sa carte" pour $k \in [[1,n]]$:
   $(L_1 = k) = \overline{K_i} \cap \ldots K_{k-1} \cap K_k$ indépendants donc $\mathrm{P}(L_1 = k) = (1-p)^{k-1} p$
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(L_1 = 0) = (1-p)^n \text{ et } \mathrm{P}(L_1 = k) = (1-p)^{k-1} p \text{ pour } k \in [[1,n]]}$

Et on vérifie :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(L_1 = k) &= \mathrm{P}(L_1 = 0) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(L_1 = k) \\
&= (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p \\
&= (1-p)^n + \frac{p}{1-p}(1-p)\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^n + 1 - (1-p)^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

c) On a $L_2(\Omega) = \{0\} \cup [[2, n]]$
On $L_2 = 0$ si on n'a pas de second utilisateur : il y en a ou 1
$(L_2 = 0) = (C_n = 0) \cup (C_n = 1)$ incompatibles donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(L_2 = 0) &= \mathrm{P}(C_n = 0) + \mathrm{P}(C_n = 1) \\
&= (1-p)^n + \binom{n}{1}(1-p)^{n-1} p \\
&= (1-p)^{n-1}(1 - p + np) \\
&= (1-p)^{n-1}(1 + (n-1)p)
\end{aligned}$$

et pour $k \geq 2$:
$(L_2 = k) =$ il y en a un au $k^{ième}$ et il y en a un avant
$(L_2 = k) = K_k \cap (C_{k-1} = 1)$ indépendants. donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(L_2 = k) &= \mathrm{P}(K_k)\,\mathrm{P}(C_{k-1} = 1) \\
&= p \cdot \binom{k-1}{1}(1-p)^{k-2} p \\
&= (k-1)p^2(1-p)^{k-2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{P}(L_2 = 0) = (1-p)^{n-1}(1 + (n-1)p) \text{ et} \\ \mathrm{P}(L_2 = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \text{ pour } k \in [[2, n]] \end{array}}$

3.2 Etude du temps moyen de passage en caisse

Le temps de passage à une caisse est une variable à densité T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = -1$ est g donnée par

$$\begin{cases} g(x) = e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et l'espérance de X est $E(X) = 1$.

2. On a $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1$
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.
$f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$
Donc f est une densité de probabilité.
T admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge.
   - $\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt = 0$
   - $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = E(X^2)$ donc converge $= V(X) + E(X)^2 = 2$

   Conclusion : $\boxed{T \text{ a une espérance et } E(T) = 2 \text{ temps moyen de passage en caisse en unité de temps.}}$

3. a) La fonction de répartition de T est donnée par $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
      - si $x < 0$: $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
      - si $x < 0$: $F_T(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x te^{-t}dt = \left[(t+1)e^{-t}\right]_0^x = 1 - (x+1)e^{-x}$

   b) La probabilité que le temps de passage soit inférieur à 2 sachant qu'il est supérieur à 1 est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{T>1}(T \leq 2) &= \frac{\mathrm{P}(T \leq 2 \cap T > 1)}{\mathrm{P}(T > 1)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(1 < T \leq 2)}{\mathrm{P}(T > 1)} \text{ avec } 1 \leq 2 \\
&= \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\
&= \frac{1 - 3e^{-3} - (1 - 2e^{-2})}{2e^{-2}} \\
&= \frac{2e^{-2} - 3e^{-3}}{2e^{-2}} \frac{e^3}{e^3} \\
&= \frac{2e - 3}{2e}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{T>1}(T \leq 2) = \dfrac{2e-3}{2e}}$

4. Trois clients se présentent simultanément à deux caisses.
C laisse passer A et B (qui passent donc chacun à l'une des caisse)
   a) C passe quand le premier des deux à fini. Donc le temps d'attente M de C est le plus petit des deux temps de passage.
   $M = \min(T_A, T_B)$
   b) On a alors $(M \geq t) = (T_A \geq t) \cap (T_B \geq t)$ et sa fonction de répartition est G donnée par

$$\begin{aligned}
G(t) &= 1 - \mathrm{P}((M \geq t)) \\
&= 1 - \mathrm{P}(T_A \geq t)\,\mathrm{P}((T_B \geq t)) \\
&= 1 - (1 - F_X(t))^2 \\
&= \begin{cases} 1 - (t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   fonction de répartition qui est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (puisque F_X l'est, ou d'après les formules)
   Donc M est à densité et une densité de M est donnée par

$$\begin{aligned}
g(x) &= G'(x) \\
&= \begin{cases} 2(x+1)xe^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$