1 EXERCICE

A tout couple (a,b) de deux réels, on associe la matrice $M(a,b)$ définie

$$M(a,b)=\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a,b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$E=\{M(a,b)\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$$

On note I la matrice identité $M(1,0)$ et A la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Comme $M(a,b)=aI+bA$ on a donc $E=\text{Vect}(I,A)$.
   Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. La famille (I,A) est libre car A et I sont deux vecteurs non proportionnels, et elle est génératrice.
   Conclusion : $\boxed{(I,A) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E)=2}$
3. On vérifie :
   $$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \iff \begin{cases} -y-2z=0 \\ 2x-3y-4z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2z \\ 2x+2z=0 \\ -x-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2z \\ x=-z \end{cases}$$
   Les solutions ne sont pas toutes nulles donc 2 est valeur propre associé au sous espace propre $E_2=\text{Vect}((-1,-2,1))$
   La famille $((-1,-2,1))$ est formée d'un seul vecteur non nul, est donc libre. Donc c'est une base de E_2 et
   Conclusion : $\boxed{\dim(E_2)=1}$
   $$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \iff \begin{cases} x-y-2z=0 \\ 2x-2y-4z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y+2z \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$
   Donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre $E_1=\text{Vect}((1,1,0),(2,0,1))$
   $((1,1,0),(2,0,1))$ sont deux vecteurs non proportionnels donc libre. $((1,1,0),(2,0,1))$ est donc une base de E_1
   Conclusion : $\boxed{\dim(E_1)=1}$
   Comme la somme des dimensions de ces sous espaces propres est 3,l'ordre de la matrice, il n'y a pas d'autres valeurs propres et A est diagonalisable.
4. Pour avoir 2 en première colonne de D, il faut placer un vecteur propre associé à 2 en première position.
   et pour avoir 1 sur la diagonale de P,on donne $((1,2,-1))$ comme autre base de E_2.
   La concaténation des bases des sous espaces propres forme une base de $\mathbb{R}^3$.
   $((1,2,-1),(1,1,0),(2,0,1))$ est donc une base de vecteurs propres et d'après la formule de changement de base on a $D=P^{-1}A\ P$ avec
   $$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1} par Gauss :

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2-2L_1\\L_3+L_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-4\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1+L_2\\-L_2\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&4\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1-2L_3\\L_2+4L_3\\-L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1-2L_3\\L_2+4L_3\\-L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

(et on pense bien à vérifier que $P\ P^{-1}=I$)

Conclusion : $\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}}$

5. On a $M(a,b)=aI+bA$ alors $D(a,b)=P^{-1}(aI+bA)P=aI+bD$ est bien diagonale.
6. Comme P et P^{-1} sont inversibles, $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ l'est.
   La diagonale de $D(a,b)$ est $(a+2b,a+b,a+b)$
   Donc $D(a,b)$ est inversible si et seulement si $a+2b\neq 0$ et $a+b\neq 0$
   Conclusion : $\boxed{M(a,b) \text{ inversible si et seulement si } a+2b\neq 0 \text{ et } a+b\neq 0}$
7. On a
   $M(a,b)^2=I\iff\left[PD(a,b)P^1\right]^2=I\iff PD(a,b)^2P^{-1}=I\iff D(a,b)^2=P^{-1}I\ P=I$
   Conclusion : $\boxed{M(a,b)^2=I\iff D(a,b)^2=I}$
   Or $D(a,b)^2=\begin{pmatrix}(a+2b)^2&0&0\\0&(a+b)^2&0\\0&0&(a+b)^2\end{pmatrix}$ donc $D(a,b)^2=I\iff a+2b=\pm1$ et $a+b=\pm1$
   Ce qui donne quatre systèmes :
   (1) $\left\{\begin{array}{c}a+2b=1\\a+b=1\end{array}\right.\iff L_1-L_2\to L_1\left\{\begin{array}{c}b=0\\a=1\end{array}\right.$
   (2) $\left\{\begin{array}{c}a+2b=1\\a+b=-1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}b=2\\a=-3\end{array}\right.$
   (3) $\left\{\begin{array}{c}a+2b=-1\\a+b=1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}b=-2\\a=3\end{array}\right.$
   (4) $\left\{\begin{array}{c}a+2b=-1\\a+b=-1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}b=0\\a=-1\end{array}\right.$
   Conclusion : $\boxed{\text{Les 4 matrices sont donc } M(1,0)\,,\ M(-3,2)\,,\ M(3,-2) \text{ et } M(-1,0)}$

2 EXERCICE

On considère les fonctions suivantes :
$g(x,y)=1+\ln(x+y)$ (fonction des variables réelles x et y ,
et pour $p\in\mathbb{N}^*$: $\left\{\begin{array}{c}f_p(x)=g(x,p)\\h_p(x)=x-f_p(x)\end{array}\right.$ (familles de fonctions de la variable réelle x)
On note (C_p) la courbe représentative de la fonction f_p.

2.1 Recherche d'extremum éventuel de la fonction g.

1. g est défini en (x,y) tels que $x+y>0$.

On trace la droite d'équation $y = -x$ (pente -1 passe par O)et on a $x + y > 0$ au dessus de cette droite.

2. g est C^1 sur D et
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x+y}$$
Si la fonction g a un extremum sur l'ouvert D alors $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$.
Ce qui est impossible.
Conclusion : $\boxed{g \text{ n'a pas d'extremum sur } D}$

2.2 Etude de la fonction f_1.

1. On a $f_1(x) = 1 + \ln(1+x)$
Donc f_1 est définie, continue, dérivable... en x tel que $1 + x > 0$ donc sur $]-1, +\infty[$
2. Par le DL de $\ln(1+x)$ en 0 on a :
Conclusion : $\boxed{f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0}$
3. La tangente en 0 a donc pour équation : $y = 1 + x$.
Et comme $f_1(x) - (1+x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon() = x^2\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\right) \to 0^-$
Conclusion : $\boxed{C_{f_1} \text{ est en dessous de sa tangente au voisinage de } 0}$
4. En $+\infty$
$f_1(x) = 1 + \ln(1+x) \to +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left(1 + \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\right) \\ &= \frac{\ln(x)}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln(x)} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{C_{f_1} \text{ a une branche parabolique horizontale en } +\infty}$

2.3 Etude d'une suite $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

1. On a $h_p(x) = x - f_p(x) = x - 1 - \ln(x+p)$.
h_p est dérivable sur $]-p, +\infty[$ et $h_p'(x) = 1 - \frac{1}{x+p} = \frac{x+p-1}{x+p}$ et comme $p \geq 1$, $h_p' > 0$ sur $]0, +\infty[$
En 0 : $h_p(x) = x - 1 - \ln(x+p) = x - 1 - \ln(x(1+p/x)) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1+p/x)}{x}\right) \to +\infty$
Donc h_p est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ dans $]\lim_0 h_p, \lim_{+\infty} h_p[$.
Et comme 0 appartient à cet intervalle, l'équation$h_p(x) = 0$ a une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$.
Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } f_p(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha_p \text{ sur }]0, +\infty[}$
2. On a $f_{p+1}(x) = 1 + \ln(x+p+1)$ donc $f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 1 + \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) = \alpha_{p+1}$
et $h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1} + p) = \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) - \ln(\alpha_{p+1} + p)$.
Et comme $\alpha_{p+1} + p + 1 > \alpha_{p+1} + p$ alors $\ln(\alpha_{p+1} + p + 1) > \ln(\alpha_{p+1} + p)$ et
Conclusion : $\boxed{h_p(\alpha_{p+1}) > 0}$

On a donc $h_p(\alpha_{p+1}) > 0 = h_p(\alpha_p)$ et comme la fonction h_p est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que α_p et α_{p+1} en sont éléments, $\alpha_{p+1} > \alpha_p$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc croissante.}}$

3. On compare les images par h_p :
$h_p(\alpha_p) = 0$ et $h_p(1+\ln(p)) = 1+\ln(p) - 1 - \ln(p+1+\ln(p)) = \ln(p) - \ln(p+1+\ln(p))$
et comme $p+1+\ln(p) > p$ alors $\ln(p) < \ln(p+1+\ln(p))$ et $h_p(1+\ln(p)) < 0 = h_p(\alpha_p)$.
Donc (h_p strictement croissante)
Conclusion : $\boxed{\alpha_p \geq 1+\ln(p)}$ et par minoration,
Conclusion : $\boxed{\text{quand } p \to +\infty : \alpha_p \to \infty}$

2.4 Valeur approchée de α_1 .

On admet que le réel α_1 appartient à intervalle $[1,3]$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$

1. Pour $n = 0 : u_0 = 1 \geq 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 1$ alors $f_1(u_n) \geq f_1(1) = 1+\ln(2) \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1$.
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \geq 1}$
2. La formule demandée suggère que $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur quel intervalle ($u_n \geq 1$ suggère $[1+\infty[$)
$f_1'(x) = \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [1,+\infty[$. Donc $|f_1'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[1,+\infty[$.
Pour $n = 0$ on a $|u_0 - \alpha_1| = \alpha_1 - 1 \leq 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ car $\alpha_1 \in [1,3]$
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ alors comme α_1 et $u_n \in [1,+\infty[$ et que $|f_1'| \leq \frac{1}{2}$ sur cet intervalle,
$|f(u_n) - f(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$ et $f_1(\alpha_1) = \alpha_1$donc $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-1}$
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$
3. Si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4}$ alors $|u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$.
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4} \iff (n-1)\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -4\ln(10) \iff (n-1) \geq 4\ln(10)/\ln(2) \iff n \geq 1+4\ln(10)/\ln(2)$
qui est réalisé par la partie entière plus 1.
Conclusion : $\boxed{n_0 = \lfloor 1+4\ln(10)/\ln(2) \rfloor + 1 \text{ la condition est réalisée.}}$
4.
```
program suiet ;
var u :real ; n0,n :integer ;
begin
     n0 :=trunc(2+4*ln(10)/ln(2)) ;
     u :=1 ;
     for n :=1 to n0 do u :=1+ln(1+u) ;
     writlen(n0,u) ;
end.
```

3 EXERCICE.

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de trois jeux présents à une fête foraine.

3.1 Premier jeu.

Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité de $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité de $\frac{9}{10}$.
Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.
une personne décide de jouer n parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. X_N est le nombre de gain en N partie indépendantes, la probabilité de gain à chaque étant de $\frac{1}{10}$.
   Conclusion : $\boxed{X_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{10}\right) \text{ d'où } E\left(X_N\right) = \frac{N}{10} \text{ et } V\left(X_N\right) = \frac{9}{100}N}$
2. Le gain est la mise moins les rapports :
   Conclusion : $\boxed{Y_n = 3X_N - N \text{ d'où } E\left(Y_N\right) = 3E\left(X_N\right) - N = -\frac{7}{10}N \text{ et } V\left(Y_N\right) = 3^2 V\left(X_N\right) = \frac{81}{100}N}$
3. a) Le paramètre de la loi de Poisson qui approche est l'espérance de la loi binomiale :
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X_{60} \widetilde{\hookrightarrow} \mathcal{P}(6)}$
   b) "Perdre moins de 50 euros" est $(Y_{60} > -50) = (3X_{60} - 60 > -50) = (X_{60} > 10/3)$
   et comme X_{60} ne prend que des valeurs entières, $(Y_{60} > -50) = (X_{60} \geq 4) = \overline{(X_{60} < 4)}$
   Avec $\mathrm{P}\left(X_{60} < 4\right) = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{P}\left(X_{60} = k\right) \simeq \sum_{k=0}^{3} e^{-6} \frac{6^k}{k!} = 0,1512$ et $\mathrm{P}\left(Y_{60} > -50\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X_{60} < 4\right)$
   Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité de perdre moins de 50 est } 0,8488}$

3.2 Deuxième jeu

Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$. on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact au centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables X_1, X_2, X_3,. de même loi, indépendantes. sont des variables à. densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Le joueur gagne si la fléchette la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ du centre. Enfin on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

1. f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ (en fait continue en 0)
   $\int_{-\infty}^{0} f = 0$ et $\int_{1}^{+\infty} f = 0$. Enfin, $\int_0^1 f = \int_0^1 2x dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$
   Pour tout x réel, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ donc
   – si $x \leq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
   – si $x \in]0,1]$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x 2tdt = x^2$
   – si $x > 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 2tdt + \int_1^x 0dt = 1$
2. X a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge, ce qui est le cas en $\pm\infty$ (fonction nulle).
   Donc X a une espérance et $E(X) = \int_0^1 2t^2 dt = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$
   Conclusion : $\boxed{E(X) = \frac{2}{3}}$

3. $(M > t)$ signifie que la plus petite distance est plus grande que t, c'est à dire qu'elle sont toutes plus grandes que t.

   Conclusion : $\boxed{(M > t) = [(X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap (X_3 > t)]}$

4. Comme elles sont indépendantes,

$$\begin{aligned} F_M(x) &= 1 - \mathrm{P}(M > x) = 1 - \mathrm{P}(X_1 > x)\,\mathrm{P}(X_2 > x)\,\mathrm{P}(X_3 > x) \\ &= 1 - (1 - F(x))^3 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{F_M(x) = 1 - (1 - F(x))^3 \text{ pour tout } x \text{ réel.}}$

   Comme F est une fonction de répartition de variable à densité, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

   Donc F_M est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

   Donc F_M est une fonction de répartition de variable à densité.

   Conclusion : $\boxed{M \text{ est à densité}}$

   et une densité de M est F_M' (là où elle est dérivable) $f_M(x) = 3(1 - F(x))^2 F'(x) = 3(1 - F(x))^2 f(x)$

   Conclusion : $\boxed{f_M(x) = \begin{cases} 6x(1 - x^2)^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

5. "le joueur gagne la partie" est l'événement $\left(M < \frac{1}{5}\right)$ de probabilité $F_M\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{25}\right)^2 = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^3$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(G) = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^3}$

3.3 Troisième jeu.

Pour ce dernier jeu. le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$. On suppose que les différents lancers de boules, sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules.

Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T„ égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

1. Au minimum,il y a une case atteinte (toutes les boules dans la même case) et au maximum, chaque boule est dans une case différente (avec au maximum N cases occupées).

   Conclusion : $\boxed{T_n(\Omega) = [[1, \min(n, N)]]}$

2. T_1 est le nombre de cases atteintes avec une boule.

   Donc $T_1(\Omega) = \{1\}$ variable certaine !

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_1 = 1) = 1}$

   $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$

   La première boule étant placée, la probabilité que la seconde vienne dans la même case est de $\frac{1}{N}$.

   la probabilité qu'elle aille ailleurs est donc de $1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N} \text{ et } \mathrm{P}(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}}$

3. $(T_n = 1)$: lorsque la première boule est placée, la probabilité pour chacune des $n-1$ suivantes d'arriver dans la même case est de $\frac{1}{N}$, indépendamment.

   Donc $\mathrm{P}(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}}$

Pour $(T_n = 2)$, il faut passer par un dénombrement précis :

Ω est l'ensemble des listes de n cases parmi N (une case pour chaque boule). ces listes sont équiprobables et $|\Omega| = N^n$.

$(T_n = 2)$ est déterminé par

- l'ensemble des 2 cases parmi N à remplir ; il y a $\binom{N}{2}$ tels choix.
- l'ensemble des boules allant dans la case la plus à droite sauf (toutes ou aucune) il y a $2^n - 2$ telles listes.

Donc $|T_n = 2| = \binom{N}{2}(2^n - 2)$ et

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_n = 2) = \frac{N(N-1)}{2}\frac{(2^n-2)}{N^n}}$ (ce qui coïncide avec T_2 pour $n = 2$)

$(T_n = n)$ est déterminé par la liste sans répétition des cases affectées. (dans l'ordre de lancement des boules)

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_n = n) = 0 \text{ si } n > N \text{ et } \mathrm{P}(T_n = n) = \frac{N!}{(N-n)!}\frac{1}{N^n}}$ (coïncide pour $T_2 = 2$)

4. ? ? ? probas totales ? avec quel SCE $(T_n = i)_{i\in[[1,n]]}$ qui ne sont pas tous possibles ? ? ?

   Pour avoir $(T_{n+1} = k)$, on pouvait avoir $(T_n = k)$ ou $(T_n = k-1)$ soit

   $(T_{n+1} = k) = (T_{n+1} = k) \cap (T_n = k) \cup (T_{n+1} = k) \cap (T_n = k-1)$ incompatibles donc

   $\mathrm{P}(T_{n+1} = k) = \mathrm{P}_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k)\,\mathrm{P}(T_n = k) + \mathrm{P}_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k)\,\mathrm{P}(T_n = k-1)$

   avec $\mathrm{P}_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$ car la $n+1^{\text{ème}}$ boule doit aller dans une des k cases déjà pourvues pour que le ombre de cases remplies ne change pas ;

   et $\mathrm{P}_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k) = \frac{N-(k-1)}{N}$ car il y a $N-(k-1)$ cases non encore remplies, et il en faut une de plus.

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathrm{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathrm{P}(T_n = k-1)}$

5. Afin de calculer l'espérance $E(T_n)$, on considère la fonction polynomiale G_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(T_n = k)\ x^k$$

   a) On a $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(T_n = k) = 1$ car on a au moins toutes les valeurs possibles de T_n.

   b) G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(T_n = k)\ x^{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} G_n'(1) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(T_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\min(N,n)} k\mathrm{P}(T_n = k) + \sum 0 \\ &= E(T_n) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{G_n'(1) = E(T_n)}$

   c) ! ! ! ! La formule (I) est encore valable pour $k = n+1$ avec $\mathrm{P}(T_n = n+1) = 0$

On a donc

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(T_{n+1}=k)\ x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{k}{N}\mathrm{P}(T_n=k) + \frac{N-k+1}{N}\mathrm{P}(T_n=k-1)\right] x^k \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathrm{P}(T_n=k)\, x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{N}{N}\mathrm{P}(T_n=k-1)\, x^k - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{k-1}{N}\mathrm{P}(T_n=k-1)\, x^k \\
&= \frac{x}{N}G_n'(x) + \sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(T_n=h)\, x^{h+1} - \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{n} h\mathrm{P}(T_n=h)\, x^{h+1} \\
&= \frac{x}{N}G_n'(x) + xG_n(x) + 0 - \frac{x^2}{N}G_n'(x) + 0 \\
&= \frac{x-x^2}{N}G_n'(x) + xG_n(x)
\end{aligned}$$

d) Les fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$

$$G_{n+1}'(x) = \frac{x-x^2}{N}G_n''(x) + \frac{1-2x}{N}G_n'(x) + xG_n'(x) + G_n(x)$$

et pour $x=1$:

$$\begin{aligned}
G_{n+1}'(1) &= -\frac{1}{N}G_n'(1) + G_n'(1) + G_n(1) \\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(T_{n+1}) = \left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1}$

e) On a alors par récurrence :

$E(T_1)=1$ et $N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^1\right] = 1 = E(T_1)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $E(T_n) = N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]$ alors

$$\begin{aligned}
E(T_{n+1}) &= \left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1 \\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]+1 \\
&= N\left[-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] + N\left(1-\frac{1}{N}\right)+1 \\
&= N\left[-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] + N \\
&= N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^* : E(T_n) = N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]}$