1 EXERCICE.

A tout triplet (a,b,c) de réels, on associe la matrice $M(a,b,c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \{M(a,b,c) \text{ avec } a,b,c \text{ réels}\}$$

1.1 Recherche d'une base de E.

1. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, On a $E = \operatorname{Vect}(A,B,C)$.

   Conclusion : $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

2. la famille (A,B,C) est génératrice de E et
   si $aA + bB + cC = 0$ alors $a = b = c = 0$, donc la famille est libre.

   Conclusion : $\boxed{(A,B,C) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = 3}$

1.2 Cas particulier de la matrice $M(1,2,3)$.

1. $M(1,2,3)$ est triangulaire

   Conclusion : $\boxed{\text{ses valeurs propres sont 1, 2 et 3}}$

2. $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - I\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0$ donc $(1,0,0)$ est un vecteur propre associé à 1

   $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2I\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = x \end{cases}$ donc $(1,1,0)$ est un vecteur propre associé à 2.

   $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3I\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3/2z \\ y = 2z \end{cases}$ donc $(3/2,2,1)$ est un vecteur propre associé à 3.

   $M(1,2,3)$ d'ordre 2 possède trois valeurs propres distinctes.
   Donc $((1,0,0),(1,1,0),(3/2,2,1))$ est une base de vecteurs propres et avec

   Conclusion : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ on a } D = P^{-1}M(1,2,3)P}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 3/2L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_1-L_2 \quad \begin{pmatrix}1&0&-3/2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_1-L_2 \quad \begin{pmatrix}1&-1&1/2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1&1/2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}}$

et

$$\begin{aligned}[M(1,2,3)]^n &= PD^nP^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1&1&3/2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&1&3/2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{2}\\0&2^n&-2^{n+1}\\0&0&3^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{[M(1,2,3)]^n = \begin{pmatrix}1&2^n-1&\frac{1}{2}3^{n+1}-2^{n+1}+\frac{1}{2}\\0&2^n&2\times 3^n-2^{n+1}\\0&0&3^n\end{pmatrix} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$

1.3 Cas particulier de la matrice $M(1,1,1)$

On pose $J = M(1,1,1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On a $J = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ d'où $J^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

   Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 3 : J^n = 0}$

2. Et comme $M(1,1,1) = I + J$ et que $IJ = J = JI$ alors (binôme)

$$\begin{aligned}[M(1,1,1)]^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^kI^{n-k}\\ &= \binom{n}{0}I + \binom{n}{1}J + \binom{n}{2}J^2 + \sum_{k=3}^{n}0\end{aligned}$$

   le découpage de la somme n'est valable que pour $n \geq 3$. (et pour $n = 2$, sans la somme)

   Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2 : [M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2}$

   Pour $n = 1$: $I_3 + 1J = M(1,1,1)$ et pour $n = 0$: $I = M(1,1,1)^0$

   Conclusion : $\boxed{\text{l'écriture est encore valable pour } n = 0 \text{ et } n = 1}$

3. *Conclusion :* $\boxed{[M(1,1,1)]^n = \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$

1.4 Cas particulier de la matrice $M(1,1,2)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $M(1,1,2)$. On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par :
$\vec{u} = (1,0,0)\,,\ \vec{v} = (0,1,0)\,,\ \vec{w} = (2,1,1)$

1. Si $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = 0$ alors $(x+2z, y+z, z) = 0$ donc $z = 0 : y = 0$ et $x = 0$
   $\mathcal{C}$ est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$
2. $M(1,1,2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u) = u$ et $u \neq 0$
   $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ donc $f(w) = 2w$ et $w \neq 0$
   Conclusion : $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont deux vecteurs propres de } f \text{ associés à 1 et 2}}$
3. $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $f(v) = u + v$
   On a donc les coordonnées des images de u, v et w dans $\mathcal{C}$ et
   Conclusion : $\boxed{T = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}$
4. Pa récurrence : $T^0 = I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^0\end{pmatrix}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$ alors
   $T^{n+1} = T^nT = \begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n+1&0\\0&1&0\\0&0&2^{n+1}\end{pmatrix}$
   Conclusion : $\boxed{T^n = \begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$
5. La matrice de passage R de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ (coordonnées dans la base canonique des vecteurs de $\mathcal{C}$) vaut $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
   et $RQ = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
   Conclusion : $\boxed{R^{-1} = Q}$
6. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique on a :
   $$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\, f = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\, \mathcal{C} \cdot \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}\, f \cdot \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}\, \mathcal{B}$$
   Conclusion : $\boxed{M(1,1,2) = R \cdot T \cdot Q}$

7. *Conclusion :* $\boxed{[M(1,1,2)]^n = R \cdot T^n \cdot Q.}$

2 EXERCICE.

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,y) = e^{x+4y}\ln(xy)$$

2.1 Etude des zéros de φ.

1. On factorise :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{2\ln(x)}{\frac{1}{x}} - 2x\ln(2) + 1\right) \\ &\to +\infty\end{aligned}$$

car $\ln(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \to 0$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}_\varphi \text{ a une asymptote verticale en } 0}$

2. En $+\infty$: $\varphi(x) = 2\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1}{x} \to +\infty$

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{x} &= 2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(2)}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &\to 0\end{aligned}$$

car $\ln(x) = o(x)$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}_\varphi \text{ a une branche parabolique horizontale en } +\infty}$

3. Sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a $\frac{x}{2} > 0$ et $x \neq 0$ donc φ est dérivable comme composée et somme de fonctions dérivables.

$$\varphi'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	affine
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2-4\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.
φ est continue et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$
donc bijective de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ dans $\left]\lim_{1/2} f, \lim_0 f\right[=]2-4\ln(2), +\infty[$.

Et comme $2-4\ln(2)\simeq -0,8$ alors $0\in\left]2-4\ln(2),+\infty\right[$ et l'équation $\varphi(x)=0$ a une unique solution dans cet intervalle.

De même elle a une unique solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

Conclusion : $\boxed{\varphi(x)=0 \text{ a deux solutions } \alpha \text{ et } \beta \text{ dans } \mathbb{R}^{+*}}$

6. On a $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

   On applique la méthode de dichotomie avec $\alpha\in[a_k,b_k]$ et $f\ (a_k)\geq 0\geq f(b_k)$ en recoupant par $c_k=(b_k+a_k)/2$

```
program dicho ;
var a,b,c :real ;
function f(x :real) :real ;
begin f :=2*ln(x/2)+1/x ; end ;
begin
    a :=0 ;b :=1/2 ;
    repaeat
        c :=(a+b)/2 ;
        if f(c)>0 then a :=c else b :=c ;
    until b-a<1E-2 ;
    wrtieln(a,b) ;
end.
```

2.2 Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

1. Les fonction $(x,y)\to x$ et $(x,y)\to y$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

   Et $xy>0$ pour $(x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ donc

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[\times]0,+\infty[\text{ comme composée et produit de fonctions } C^2}$

2. $f(x,y)=e^{x+4y}\ln(xy)$ donc

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{x+4y}\ln(xy)+e^{x+4y}\frac{1}{x}=f(x,y)+\dfrac{1}{x}e^{x+4y}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4e^{x+4y}\ln(xy)+\frac{1}{y}e^{x+4y}=4f(x,y)+\dfrac{1}{y}e^{x+4y}\end{array}\right.$$

3. On **vérifie** que les dérivées premières s'annulent en ces points :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right) &= e^{2\alpha}\ln\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)+e^{2\alpha}\frac{1}{\alpha}\\ &= e^{2\alpha}\left[2\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{\alpha}\right]\\ &= e^{2\alpha}\varphi(\alpha)\\ &= 0\end{aligned}$$

   et de même pour β.

   Conclusion : $\boxed{\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right) \text{ et } \left(\beta,\frac{\beta}{4}\right) \text{sont des points critiques de } f}$

4. Pour tout (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{1}{x^2}e^{x+4y} + \frac{1}{x}e^{x+4y} \text{ donc} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right) &= 0 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)e^{2\alpha x} \\
&= \frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 4\frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) + \frac{4}{y}e^{x+4y} - \frac{1}{y^2}e^{x+4y} \text{ donc} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right) &= 0 + \left(\frac{16}{\alpha} - \frac{16}{\alpha^2}\right)e^{2\alpha} \\
&= 16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{4}{x}e^{x+4y} \text{ donc} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right) &= 0 + \frac{4}{\alpha}e^{2\alpha}
\end{aligned}$$

5. Avec $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
rt - s^2 &= \left[\frac{\alpha-1}{\alpha^2}16\frac{\alpha-1}{\alpha^2} - \left(\frac{4}{\alpha}\right)^2\right]e^{4\alpha} \\
&= \frac{16}{\alpha^4}\left[\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \alpha^2\right]e^{4\alpha} \\
&= \frac{16}{\alpha}\left[1-2\alpha\right]e^{4\alpha}
\end{aligned}$$

et comme $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ on a on donc $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$

Conclusion : $\boxed{\text{sur l'ouvert }]0,+\infty[\times]0,+\infty[\ f \text{ a un maximum local en } \left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)}$

6. En $\left(\beta,\frac{\beta}{4}\right)$, on aura les mêmes simplification par $f\left(\beta,\frac{\beta}{4}\right) = 0$ et

$$rt - s^2 = \frac{16}{\beta}\left[1-2\beta\right]e^{4\beta}$$

Mais comme $\beta > 1/2$ (on avait $\varphi(1/2) < 0$)

Conclusion : $\boxed{\left(\beta,\frac{\beta}{4}\right) \text{ n'est pas un extremum local (donc non plus global)}}$

3 EXERCICE.

3.1 Liminaire.

Soient x un réel dans l'intervalle $[0,1[$, n un entier naturel non nul et S_n la fonction définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. Comme $x \neq 1$, on a $S_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
2. S_n est dérivable sur $[0, 1[$ et

$$\begin{aligned} S_n'(x) &= 0 + \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport.

3.2 Partie 1.

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $E(X) = m$ et la centrée-réduite $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ donc $\mathrm{P}\left(\dfrac{X - m}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc $m = E(X) = 5$
   et $\mathrm{P}(X \leq 7) = \mathrm{P}\left(\dfrac{X - 5}{\sigma} \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right) = 0.8413$ donc $\dfrac{2}{\sigma} = 1$ et $\sigma = 2$
   Conclusion : $\boxed{m = 5 \text{ et } \sigma = 2}$
2. $\mathrm{P}(X \geq 9) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 9) = 1 - \Phi\left(\dfrac{9 - 5}{2}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$
   Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes vaut 0,0228}}$
3. On demande

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{X>3}(X \leq 7) &= \frac{\mathrm{P}(X \leq 7 \cap X > 3)}{\mathrm{P}(X > 3)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(3 < X \leq 7)}{\mathrm{P}(X > 3)} = \frac{\mathrm{P}(-1 < X^* \leq 1)}{\mathrm{P}(X^* > -1)} \end{aligned}$$

   $\mathrm{P}(X^* > -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) = 0,8413$
   $\mathrm{P}(-1 < X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,6826$
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{X>3}(X \leq 7) = \dfrac{0,6826}{0,8413}}$
4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

a) La probabilité de retard inférieur à 7 minute est de p chaque jour.

Les retard sont indépendants. Donc sur 10 jours,

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(10,p),\ E(Y) = 10p \text{ et } V(Y) = 10p(1-p)}$

b) On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.

En notant A_k l'événement "le bus a moins de 7 minutes de retard le jour k"

$$\begin{aligned}
[Z=0] &= \bigcap_{k=1}^{10} A_k \text{ indépendants donc} \\
\mathrm{P}[Z=0] &= \prod_{k=1}^{10} \mathrm{P}(A_k) = p^{10} \\
[Z=k] &= \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \cap \overline{A_k} \text{ donc} \\
\mathrm{P}[Z=k] &= p^{k-1}(1-p) \text{ pour } k \in [[1,10]]
\end{aligned}$$

D'où l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=0}^{10} k\mathrm{P}(Z=k) \\
&= 0\mathrm{P}(Z=0) + \sum_{k=1}^{10} kp^{k-1}(1-p) \\
&= (1-p)\sum_{k=1}^{10} kp^{k-1} \\
&= \frac{10p^{11} - 11p^{10} + 1}{(1-p)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(Z) = \dfrac{10p^{11} - 11p^{10} + 1}{(1-p)}}$

5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
   - Le premier jour, il prend le bus.
   - Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
   - Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

   On note p_n la probabilité de l'événement $A_n =$" Monsieur Thurman prend le bus le jour n"

   a) Pour tout entier naturel n non nul, $\left(A_n, \overline{A_n}\right)$ est un système complet d'événements donc

   $$\mathrm{P}(A_{n+1}) = \mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\,\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right)$$

   La probabilité d'attendre moins de 7 minutes étant p : $\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \mathrm{P}(\text{"moins de 7 min"}) = p$

et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ quand on a pris le métro.
Enfin $P\left(\overline{A_n}\right) = 1 - P(A_n)$ donc

$$P(A_{n+1}) = p\,p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n)$$

Conclusion : $\boxed{p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right)p_n + \frac{1}{2}}$

b) Soit α le réel vérifiant :

$$\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)\alpha + \frac{1}{2} \iff \left(\frac{3}{2} - p\right)\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\iff \alpha = \frac{1}{3 - 2p}$$

On a $p_{n+1} - \alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)(p_n - \alpha)$ donc la suite $(p_n - \alpha)$ est géométrique de raison $\left(p - \frac{1}{2}\right)$ et de premier terme : $p_1 - \alpha = 1 - \alpha$
Donc $(p_n - \alpha) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1}(1 - \alpha)$ et

Conclusion : $\boxed{p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1}(1 - \alpha) + \alpha \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*}$

c) Comme $\left|p - \frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$ et $p_n \to \alpha$
Conclusion : $\boxed{p_n \to \alpha}$

3.3 3.3. Partie 2.

1. Le nombre d'appels reçus par le standard d'une société de taxis pendant une période de durée t suit une loi de Poisson Y_t de paramètre λt, λ étant une constante strictement positive. Une origine de temps étant choisie, on note T la variable aléatoire réelle représentant le temps d'attente du premier appel vers ce standard. Par convention $P(T \leq t) = 0$ pour $t < 0$.

   a) *Conclusion :* $\boxed{P[Yt = k] = \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!} \text{ et } E(Y_t) = V(Y_t) = \lambda t}$

   b) $[Y_t = 0]$ signifie que pendant la période $[0, t]$ il n'y a eu aucun appel, c'est à dire que le premier appel n'est arrivé qu'après t.
   Conclusion : $\boxed{[Y_t = 0] = [T > t]}$ donc ils ont même probabilité et
   Conclusion : $\boxed{P\ [T > t] = \exp(-\lambda t) \text{ et } P\ [T \leq t] = 1 - \exp(-\lambda t) \text{ pour tout } t \geq 0}$

   c) On a donc $F_T(t) = P[T \leq t] = 1 - \exp(-\lambda t)$ si $t \geq 0$ et $F_T(t) = 0$ si $t < 0$ et on reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle
   (on peut,sinon, chercher d'abord la densité„ après avoir vérifié que F_t était continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$: $F_T'(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ si $t > 0$ et 0 si $t < 0$)
   Conclusion : $\boxed{T \hookrightarrow \varepsilon(\lambda) \text{ donc } E(T) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(t) = \frac{1}{\lambda^2}}$

2. La durée, exprimée en heures, du transport d'un client par la société est une variable aléatoire U à densité dont une densité est donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = t\,e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

a) g est positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{0} g = \int_{-\infty}^{0} 0$ converge et est nulle

$\int_{0}^{+\infty} t\ e^{-t} dt = 1$ (espérance d'une loi $\varepsilon(1)$)

(on peut aussi calculer l'intégrale partielle en intégrant par parties)

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\boxed{g \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

b) $\int_{0}^{+\infty} tg(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} t^2\ e^{-t} dt = E(X^2)$ avec $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$ d'où $E(X^2) = V(X) + E(X) = 1 + 1 = 2$

Conclusion : $\boxed{U \text{ a une espérance et } E(U) = 2 \text{ durée moyenne de transport.}}$