Corrigé ECRICOME Eco 2010 par Pierre veuillez

EXERCICE 1.

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la
base ,$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$est donnée par :

$$M_a=\begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$$

I. Recherche des valeurs propres de f_a.

1. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$
   $(M_a-\lambda I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0\iff\begin{cases}(a+2-\lambda)x-(2a+1)y+az=0\\ x-\lambda y=0\\ y-\lambda z=0\end{cases}$ et par substitution
   $\iff\begin{cases}\left[(a+2-\lambda)\lambda^2-(2a+1)\lambda+a\right]z=0\\ x=\lambda^2 z\\ y=\lambda z\end{cases}$
   avec $[]=-\lambda^3+(a+2)\lambda-(2a+1)\lambda+a=-Q(\lambda)$
   Donc si $Q(\lambda)\neq 0$ la seule solution est $(x,y,z)=0$ et λ n'est pas valeur propre.
   Et si $Q(\lambda)=0$ alors il y a des solutions non nulles.
   Conclusion : $\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } f_a \text{ si et seulement si } \lambda \text{ racine de } Q}$
2. On a $Q(1)=1-(a+2)+(2a+1)-a=0$
   Conclusion : $\boxed{1 \text{ est racine de } Q}$
3. on peut donc factoriser $Q(x)$ par $(x-1)$; en posant la division euclidienne ; par identification ou par Horner :

$$\begin{array}{cccc|c} x^3 & -(a+2)x^2 & +(2a+1)x & -a & x-1 \\ \hline x^3 & -x^2 & & & x^2-(a+1)x+a \\ & -(a+1)x^2 & +(2a+1)x & -a & \\ & -(a+1)x^2 & +(a+1)x & -a & \\ & & ax & -a & \\ & & ax & -a & \end{array}$$

   donc $x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a=(x-1)\left(x^2-(a+1)x+a\right)$
   $x^2-(a+1)x+a$ a pour discriminant $\Delta=(a+1)^2-4a=a^2-2a+1=(a-1)^2$
   et a donc pour racines $x=\frac{a+1+a-1}{2}=a$ et $x=\frac{a+1-(a-1)}{2}=1$
   Conclusion : $\boxed{Q \text{ a pour racines } a \text{ et } 1 : 2 \text{ racines si } a\neq 1 \text{ et une seule si } a=1}$
4. Lorsque $a=1$, par l'absurde :
   si f_1 est diagonalisable, alors comme 1 est la seule valeur propre de M_1, il existe une matrice P inversible telle que $M_1=PIP^{-1}=I$ ce qui est faux.
   Conclusion : $\boxed{\text{si } a=1 \text{ alors } f_1 \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Bilan : Factrorisation lourde.

II. Réduction de la matrice M_a.

Dans toute la suite de l'exercice on suppose a différent de 1.

Soit $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ la famille de vecteurs de E définie par

$$\begin{cases} e_1' = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3' = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

1. L'idée ici est de se ramener à ce sur quoi on dispose d'informations : à $\mathcal{B}$.
   Comme $\mathcal{B}$ comprend trois vecteurs, alors E est de dimension 3.
   $\mathcal{B}'$ ayant trois vecteurs, il suffit donc de prouver qu'elle est libre.
   Soient x, y, z réels, si $xe_1' + ye_2' + ze_3' = 0$ alors
   $x\left(a^2 e_1 + a e_2 + e_3\right) + y\left(e_1 + e_2 + e_3\right) + z\left(2e_1 + e_2\right)$
   $= \left(xa^2 + y + 2z\right) e_1 + \left(ax + y + z\right) e_2 + \left(x + y\right) e_3 = 0$
   et comme $\mathcal{B}$ est libre $\begin{cases} xa^2 + y + 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[-a^2 + 1 + 2\left(a - 1\right)\right] y = 0 \\ z = \left(a - 1\right) y \\ x = -y \end{cases}$
   avec $[\cdots] = -a^2 + 2a - 1 = -\left(a - 1\right)^2$
   et comme $a \neq 1$ on a donc $y = z = x = 0$
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est libre de 3 vecteurs donc une base de } E}$

On note P_a la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

2. e_1' a pour coordonnées $(a^2, a, 1)$ dans $\mathcal{B}$.
   $M_a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$
   Donc $f_a\left(e_1'\right) = ae_1'$ et $e_1' \neq 0$
   Conclusion : $\boxed{e_1' \text{ est un vecteur propre de } f_a \text{ associé à } a}$
3. Les vecteurs de F sont les combinaisons linéaires $xe_2' + ye_3'$ avec x et y réels.
   Il faut montrer que l'image d'une telle combinaison est encore combinaison de e_2' et e_3'.
   $\begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f_a\left(e_2'\right) = e_2'$
   $\begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f_a\left(e_3'\right) = e_2' + e_3'$
   Donc $f_a\left(xe_2' + ye_3'\right) = xf_a\left(e_2'\right) + yf_a\left(e_3'\right) = xe_2' + y\left(e_2' + e_3'\right) \in F$
   Conclusion : $\boxed{f_a(F) \subset F}$
4. On a $f_a\left(e_1'\right) = e_1'$ qui a donc pour coordonnées $(1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}'$
   de même $f_a\left(e_2'\right) = e_2'$ et $f_a\left(e_3'\right) = e_2' + e_3'$ donc
   Conclusion : $\boxed{\text{la matrice de } f_a \text{ dans } \mathcal{B}' \text{ est } T_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$
5. Pour $n = 0$ $\begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = T^0$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $T^{n+1} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{\text{par récurrence, } T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

Bilan : la question 3) aurait été plus naturelle en 4)

III. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n : u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

1. On a donc pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La suite des colonnes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison M_2 donc $C_n = M_2^n C_0$ pour tout entier n.
   La formule de changement de base donne $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f_a) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f_a)\,\text{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ donc $M_2 = P_2 T_2 P_2^{-1}$ et $M_2^n = P_2 T_2^n P_2^{-1}$ et finalement

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

3. Les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ donnent $P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 4L_3 \to L_3 \\ L_2 - 2L_3 \to L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 \to L_1 \\ -L_2 \to L_2 \\ L_3 - 3L_2 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_3 \to L_1 \\ L_2 - L_3 \to L_3 \\ -L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_3 \to L_1 \\ L_2 - L_3 \to L_3 \\ -L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ (dont on prend soin de tester le produit avec P_2)

on a enfin

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \\
&= P_2 T_2^n \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= P_2 \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n \\ -5n-2 \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ 3 \cdot 2^n - 5n - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{u_n = 3 \cdot 2^n - 5n - 2}$

4. Et $u_n = 3 \cdot 2^n - 5n - 2 = 2^n \left(3 - 5n/2^n - 2/2^n\right) \to +\infty$ car $n = o\left(2^n\right)$

   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est divergente}}$

Bilan : questions liées et sans sécurisation. Calculs lourdes.
Conclusion : peut déatbiiser si on le prend mal.

EXERCICE 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. Quand $x \to 0^+$, on factorise

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(x)}{1/x} - \frac{\ln(1+x)}{1/x} + 1\right) \\
&\to +\infty
\end{aligned}$$

   car $\ln(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+

   Conclusion : $\boxed{\text{la courbe représentative de } \varphi \text{ a une asymptote verticale en } 0}$

2. En $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \ln(x) - \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) + \frac{1}{x} \\
&= -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la courbe représentative de } \varphi \text{ a une asymptote horizontale en } +\infty}$

3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($x > 0$ et $x+1 > 0$ et $x \neq 0$)

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

4. On vérifie la cohérence :

x	0		$+\infty$
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.
φ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$
donc bijective de $]0,+\infty[$ sur $]\lim_{+\infty} f, \lim_0 f[=]0,+\infty[$
De plus, $1 \in]0,+\infty[$ et donc
Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } \varphi(x) = 1 \text{ possède une unique solution } \alpha.}$
On compare les images :
$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 3 = -2\ln(2) + 3 > 1$
$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -\ln(3) + 2 < 1$
Donc $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) > \varphi(\alpha) > \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ et comme φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors
Conclusion : $\boxed{\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}}$

6. Pour obtenir un encadrement de α à 10^{-2}, près, on procède par dichotomie :
avec $a \leq \alpha \leq b$ si $f(a) > 1 > f(b)$

```
program dicho ;
function f (x :real) :real ;
begin f :=ln(x)-ln(1+x)+1/x ; end ;
var a,b,c :real ;
begin
     a :=1/3 ; b :=1/2 ;
     repeat
          c :=(a+b)/2 ;
          if f(c)>1 then a :=c else b :=c
     until b-a< 1E-2 ;
     writeln(a,b) ;
end.
```

Bilan : classique sans être élémentaire. Permet de valoriser le travail fait pendant l'année.

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question **I.5.** On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq \alpha \end{cases}$$

1. f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$ et positive.
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre en $\pm\infty$
   $\int_{-\infty}^{\alpha} f(t)\,dt$ converge et est nulle.

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{A} f(t)\,dt &= \int_{\alpha}^{A} \frac{1}{t^2(t+1)}dt \\ &= \int_{\alpha}^{A} -\varphi'(t)\,dt \\ &= [-\varphi(t)]_{\alpha}^{A} \\ &= -\varphi(A) + \varphi(\alpha) \\ &= \varphi(A) + 1 \to 1 \text{ quand } A \to +\infty \end{aligned}$$

   onc $\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est impropre en $\pm\infty$.
   $\int_{-\infty}^{\alpha} tf(t)\,dt = 0$
   Pour la convergence en $+\infty$, on porcède par comparaison : $tf(t) = \dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t^2}\dfrac{1}{(1+1/t)} \sim \dfrac{1}{t^2}$
   Or $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann) donc par équivalence de fonctions positives, $\int_{\alpha}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge également
   Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance } E(X)}$

3. pour $x > \alpha$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \frac{1}{x^2} &= \frac{-1}{x^2(x+1)} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x}{x^2(x+1)} \\ &= xf(x) \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{A} xf(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{A} \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}dx \\ &= \left[\varphi(x) - \frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{A} \\ &= \varphi(A) - \frac{1}{A} - \varphi(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \\ &\to \frac{1}{\alpha} - 1 \end{aligned}$$

Donc $\int_{\alpha}^{+\infty} tf(t)\,dt = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$

Conclusion : $\boxed{E(X) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}}$

On part de $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ donc $3 > \dfrac{1}{\alpha} > 2$ et $\dfrac{2}{3} > 1-\alpha > \dfrac{1}{2}$ donc (produit de termes positifs) $2 > \dfrac{1-\alpha}{\alpha} > 1$

Conclusion : $\boxed{1 < E(X) < 2}$

4. Comme $x^2 f(x) \sim \frac{1}{x}$ dont l'intégrale diverge en $+\infty$, alors par comparaison de fonciton positives, celle de $x^2 f(x)$ également.
   X^2 n'a donc pas d'espérance et
   Conclusion : $\boxed{X \text{ n'a pas de variance}}$

Conclusion : exercice demandant de l'astuce et permettant aux meilleurs de se mettre en valeur.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.
Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.
On note :
- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé
- E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,
- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Etude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.
Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :
- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie ;
- Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. $E_2 = (D_1 < D_2) = \bigcup_{i=2}^{6} (D_1 < i \cap D_2 = i)$ incompatibles donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E_1) &= \sum_{i=2}^{6} \mathrm{P}(D_1 < i)\,\mathrm{P}(D_2 = i) \\ &= \sum_{i=2}^{6} \frac{i-1}{6}\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36}\sum_{j=1}^{5} j \\ &= \frac{5 \cdot 6}{36 \cdot 2} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

et comme (E_1, E_2, E_3) est un système complet d'événements, $\mathrm{P}(E_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(E_1) = \mathrm{P}(E_3) = \dfrac{5}{12} \text{ et } \mathrm{P}(E_2) = \dfrac{1}{6}}$

On pouvait aussi dire que $\mathrm{P}(E_1) = \mathrm{P}(E_3)$ par **symétrie** des deux dés d'où $2\mathrm{P}(E_1) = 1 - \frac{1}{6}$
Il était également possible dénombrer dans un tableau exhaustif de $\Omega = [[1,6]]^2$ dont les éléments sont **équiporbables**

$D_1 \backslash D_2$	1	$2 \cdots$		6
1	$=$	$<$	$\cdots$	$<$
2	$>$	$=$		
6	$>$	$>$		$=$

où l'on retrouve les 6 cas sur 36 d'égalité,
et les $1+2+3+4+5$ cas sur 36 d'être supérieur (ou inférieur).

2. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $(X_i = 0) = E_1$; $(X_i = 1) = E_3$ et $(X_i = 2) = E_2$
La loi de X_i est donc donnée par :

k	0	1	2	
$\mathrm{P}(X_i = k)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	
$k\mathrm{P}(X_i = k)$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4} = E(X)$
$k^2\mathrm{P}(X_i = k)$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{12} = E(X^2)$

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{12} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{48}$

Conclusion : $\boxed{E(X_i) = \dfrac{3}{4} \text{ et } V(X_i) = \dfrac{25}{48}}$

3. Y_1 est le nombre de points au bout d'un seul tirage. Donc $Y_1 = X_1$ et sa loi est ci dessus.

4. On a $Y_2 = X_1 + X_2$
Donc $Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   - $(Y_2 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ indépendantes
   $\mathrm{P}(Y_2 = 0) = \mathrm{P}(X_1 = 0)\,\mathrm{P}(X_2 = 0) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}$
   - $(Y_2 = 1) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ réunion d'incompatibles
   $\mathrm{P}(Y_2 = 1) = \frac{5}{12}\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\frac{5}{12} = \frac{50}{144} = \frac{25}{72}$
   - $(Y_2 = 2) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 0)$
   $\mathrm{P}(Y_2 = 2) = \frac{5}{12}\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \frac{5}{12}\frac{1}{6} = \frac{20+25}{144} = \frac{5}{16}$
   - $\mathrm{P}(Y_2 = 3) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1)$
   $\mathrm{P}(Y_2 = 1) = \frac{1}{6}\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$
   - enfin, $(Y_2 = 4) = (X_1 = 2 \cap X_2 = 2)$
   $\mathrm{P}(Y_2 = 4) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

k	0	1	2	3	4	
$\mathrm{P}(Y_2 = k)$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$= 1$

5. a) Comme à chaque étape, on peut engranger de 0 à 2 points, en 3 étapes, $Y_3(\Omega) = [[0, 6]]$
   b) Ce tableau à double entrée croise les valeurs de Y_2 et de Y_3. IL continent donc au total 35 valeurs ...
   $\mathrm{P}(Y_2 = 0 \cap Y_3 = 0) = \mathrm{P}(Y_2 = 0 \cap X_3 = 0) = \frac{25}{144}\frac{5}{12}$

$Y_2 \backslash Y_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{25}{144}\frac{5}{12}$	$\frac{25}{144}\frac{5}{12}$	$\frac{25}{144}\frac{1}{6}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{25}{72}\frac{5}{12}$	$\frac{25}{72}\frac{5}{12}$	$\frac{25}{72}\frac{1}{6}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{5}{16}\frac{5}{12}$	$\frac{5}{16}\frac{5}{12}$	$\frac{5}{16}\frac{1}{6}$	0	0
3	0	0	0	$\frac{5}{36}\frac{5}{12}$	$\frac{5}{36}\frac{5}{12}$	$\frac{5}{36}\frac{1}{6}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{1}{36}\frac{5}{12}$	$\frac{1}{36}\frac{5}{12}$	$\frac{1}{36}\frac{1}{6}$
$\mathrm{P}(Y_3 = k)$	$\left(\frac{5}{12}\right)^3$	$\frac{125}{576}$	$\frac{175}{576}$	$\frac{425}{12^3}$	$\frac{35}{288}$	$\frac{5}{144}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

   N.B. j'ai effectué les calculs avec un logiciel de calcul formel. A fuir le jour du concours ! (il ne fallait pas simplifier les fractions ;.. mauvais réflexe)

(et avec une calculatrice , on peut vérifier que la somme de ces valerurs vaut 1)

c) La loi de Y_3 est obtenue comme loi marginale du couple.

6. a) Y_n est le nombre total de points donc

Conclusion : $\boxed{Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k}$

d'où $E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{3}{4}n$ et $V(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{25}{48}n$ (par indépendance des (X_i)).

b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ? :

Il faut décortiquer la question :

Soit Z le nombre de partie minimum pour obtenir plus de 10 points. (le numéro de la partie où l'on dépasse pour la première fois les 10 points)

$(Z = n) = (Y_n > 10) \cap (Y_{n-1} \leq 10)$ dont la probabiltié n'est pas immédiate ! et l'espérance non plus !

Sans doute le concepteur de l'énnoncé attendait il plutot la valeur de n pour laquelle $E(Y_n) > 10$ autrement dit combien de parties pour obtenir en moyenne plus de 10 points.

Bilan : le résultat du 1) est indispensable à la suite et n'est pas donné. Les calculs pour la loi de Y3 sont lourds.

II. Etude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.
Plus précisément on note :
T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).
Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :
Exemple 1 : 0 0 l 0 1 2 . . . .. alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.
Exemple 2 : 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

1. a) On a $T_1(\Omega) = [[1, +\infty[[$ et $(T_1 = k)$ signifie que l'on marque le premier point (ou 2 points d'un coup) à la $k^{ième}$ partie

Les parties étant indépendantes $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{7}{12}\right)$ et $\mathrm{P}(T_1 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{7}{12}$

b) Et on a $E(T_1) = \dfrac{12}{7}$ et $V(T_1) = \left(\dfrac{12}{7}\right)^2 \dfrac{5}{12} = \dfrac{5 \cdot 12}{7^2}$

2. a) $T_2(\Omega) = [[1, +\infty[[$ car on peut marquer 2 points dès la première partie.

b) $(T_2 = 1)$ signifie que l'on atteint 2 points lors de la première partie donc $(T_2 = 1) = (X_1 = 2)$ et $\mathrm{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{6}$

$(T_2 = 2)$ que le total atteint 2 à la seconde partie donc

$(T_2 = 2) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 \geq 1)$ donc $\mathrm{P}(T_2 = 2) = \frac{5}{12}\frac{1}{6} + \frac{5}{12}\frac{7}{12} = \frac{5}{16}$

c) pour $k \geq 3$, $(T_2 = k)$ signifie que 2 points ont été atteints à la $k^{ième}$ partie, et pas avant, c'est à dire que

- ou bien que jusqu'à la $(k-1)^{ème}$ aucun point n'avait été marqué et que deux points l'ont été à la $k^{ième}$,
  formalisé par : $\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = 0) \cap (X_k = 2)$ probabilité $\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$
- ou bien dans les $k-1$ premières parties, un seul point a été marqué à une des parties et 0 aux autres, et un ou deux points ont été marqués à la $k^{ième}$
  formalisé par $\bigcup_{i=1}^{k-1} (X_i = 1) \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} (X_j = 0) \cap (X_k > 1)$
  probabilité $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{5}{12} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \frac{7}{12} = (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$

Les deux événements étant incompatibles,

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}}$

d) Pour $k = 1$ on a $\left(\frac{5}{12}\right)^{1-1} \times \frac{1}{6} + (1-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{1-1} \times \frac{7}{12} = \frac{1}{6} = \mathrm{P}(T_2 = 1)$
Et pour $k = 2$ on a $\left(\frac{5}{12}\right)^{2-1} \times \frac{1}{6} + (2-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{2-1} \times \frac{7}{12} = \frac{5}{16} = \mathrm{P}(T_2 = 2)$
Donc ce résultat est encore valable pour $k = 1$ et pour $k = 2$.

e) On n'a donc pas à traiter à part les valeurs $k = 1$ et $k = 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(T_2 = k) &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}\sum_{k=1}^{N}(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{h=0}^{N-1}\left(\frac{5}{12}\right)^{h} + \frac{7}{12}\sum_{h=0}^{N-1} h\left(\frac{5}{12}\right)^{h} \\
&\to \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{5}{12}} + \frac{7}{12}\frac{\frac{5}{12}}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^2} \\
&= \frac{1}{6}\frac{12}{7} + \frac{7}{12}\frac{12 \times 5}{7^2} \\
&= \frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1
\end{aligned}$$

f) L'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » est le contraire de « l'obtenir à un moment donné » : $\bigcup_{k=1}^{+\infty} T_2 = k$ qui est quasi certain.

Conclusion : $\boxed{\text{« n'obtenir jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » est quasi impossible}}$

g) $\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathrm{P}(T_2 = k)$ est à termes positifs. L'absolue convergence équivaut donc à la simple convergence.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\mathrm{P}(T_2 = k) &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}\sum_{k=1}^{N} k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}\frac{5}{12}\sum_{k=1}^{N} k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \\
&\to \frac{1}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^2} + \frac{35}{12^2}\frac{2}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^3} \\
&= \frac{1}{6}\frac{12^2}{7^2} + \frac{35}{12^2}\frac{12^3 2}{7^3} = \frac{24}{7^2} + 5\frac{24}{7^2} = \frac{6 \cdot 24}{7^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{T \text{ a une espérance et } E(T) = \frac{144}{49}}$

Bilan : le seul point de controle est le résultat du II2c ... alors que les calculs se prètent aux erreurs.