EXERCICE 1

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A, on liste les critères :

– Δ est une matrice diagonale donc diagonalisable.

– $N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $N^2 = 0$ donc N est nilpotente

– $\Delta N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\Delta N = N\Delta$

et $N + \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Conclusion : $\boxed{(\Delta, N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A}$

Dans toute la suite de l'exercice, on pose

$$: A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Pour répondre aux question a) et b) on détermine les valeurs et sous espaces propres de A :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(A - \alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (1) \begin{cases} (3-\alpha)\,x + y - z = 0 \\ -2x - \alpha y + 2z = 0 \\ (1-\alpha)\,z = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha \neq 1$

$$(1) \iff \begin{cases} (3-\alpha)\,x + y = 0 \\ -2x - \alpha y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff (2) \begin{cases} y = -(3-\alpha)\,x \\ [-2 + \alpha(3-\alpha)]\,x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$[-2 + \alpha(3-\alpha)] = -\alpha^2 + 3\alpha - 2$ qui a pour racines 1 et 2

Si de plus $\alpha \neq 2$ alors $[] \neq 0$ et

$$(2) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ donc } \alpha \text{ n'est pas valeur propre si } \alpha \neq 1 \text{ et } \alpha \neq 2$$

Si $\alpha = 2$ (et $\alpha \neq 1$) alors

$$(2) \iff \begin{cases} y = -x \\ x \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{qui a pour solutions } E_2 = \text{Vect}\left((1,-1,0)\right)$$

Conclusion : $\boxed{2 \text{ est valeur propre associé à Vect}\left((1,-1,0)\right)}$

Si enfin $\alpha = 1$ alors

$$(1) \iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \quad L_2 + L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{1 \text{ est valeur propre associée à Vect}\left((1,-2,0)\right)}$

Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } \{1,2\}}$

b) **Attention** : la condition suffisante de diagonalisabilité. ne s'applique pas ici. Elle ne permet de conclure que dans le cas favorable.

Pour E_2 : $((1,-1,0))$ est une famille libre (un vecteur non nul) et génératrice de E_2. Elle forme donc une base de E_2 et $\dim(E_2) = 1$

de même$\dim(E_1) = 1$

La somme des dimensions des sous espaces propres est donc $2 \neq 3$

Conclusion : $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est donc pas diagonalisable}}$

3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\Delta X_1 = 2X_1$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\Delta X_2 = X_2$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta X_3 = X_3$

b) Avec $e_1 = (1,-1,0)$ ...on vérifie que (e_1, e_2, e_3) est une base de vecteurs propres associées à 2, 1 et 1 :

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$

Si $x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3 = 0$ alors $\begin{cases} x + z = 0 \\ -x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 3z = 0 \\ x = 2z \\ y = 0 \end{cases}$ et $x = y = z = 0$

Donc (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Donc Δ est diagonalisable et avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a P inversible et (matrice de passage) et

Conclusion : $\boxed{P^{-1}\Delta P = D}$

c) En appliquant la méthode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_1 + L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}L_1\\L_2\leftrightarrow L_3\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}L_1+L_3\to L_3\\L_2\\-L_3\to L_3\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}L_1+L_3\to L_3\\L_2\\-L_3\to L_3\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

et on prend soin de vérifier le produit !

Conclusion : $\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}}$

4. a) $N^1=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$, $N^2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{N \text{ est une matrice nilpotente.}}$

b) Δ est diagonalisable

N est nilpotente

$\Delta N=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=N$

et $N\Delta=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=N$ donc $\Delta N=N\Delta$

et enfin, $\Delta+N=A$

Conclusion : $\boxed{(\Delta,N) \text{ est une décomposition de Dunford de la matrice } A}$

c) Comme Δ et N commutent , on a pour tout entier n :

$$\begin{aligned}A^n&=(N+\Delta)^n\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k\Delta^{n-k} \text{ si } n\geq 2 \text{ et aussi pour } n=1\\&=\binom{n}{0}N^0\Delta^n+\binom{n}{1}N^1\Delta^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}N^k\Delta^{n-k}\\&=\Delta^n+nN\Delta^{n-1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N} : A^n=\Delta^n+nN\Delta^{n-1}}$

d) Pour $k=1$ on a $\Delta N=N$

Soit $k\geq 1$ tel que $\Delta^kN=N$ alors $\Delta^{k+1}N=\Delta\Delta^kN=\Delta N=N$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k\geq 1, \quad \Delta^kN=N}$

e) On a pour $n-1\geq 1$ donc pour $n\geq 2$: $\Delta^{n-1}N=N=N\Delta^{n-1}$ puisqu'elles commutent donc $A^n=\Delta^n+nN$ avec Δ^n diagonalisable ($=PD^nP^{-1}$) et nN nilpotente puisque $(nN)^2=n^2N^2=0$

Enfin, Δ^n et nN commutent puisque Δ et N le font.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}(\Delta^n, nN) \text{ sera une décomposition de Bedford pour } n \geq 2 \\ (\Delta^1, 1N) = (\Delta, N) \text{ l'est encore pour } n = 1 \\ (\Delta^0, 0N) = (I, 0) \text{ l'est aussi pour } A^0 \text{ (avec } 0^0 \neq 0)\end{array}}$

EXERCICE 2

On considère l'application φ défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in \left]0, +\infty\right[\times \left]0, +\infty\right[, \quad f(x, y) = xy + \ln(x)\ln(y)$$

PARTIE I. Etude des zéros de φ.

1. En $+\infty$: $\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) \to -\infty$
   $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x} - x\ln(x) \to -\infty$ et on a donc une branche parabolique verticale.
2. En 0 : $x^2 \ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x^2} \to 0$ avec $\ln(x) = o(1/x^2)$
   Donc $\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) \to 1 = \varphi(0)$ donc φ est continue en 0.
   de plus elle est continue sur $\left]0, +\infty\right[$ comme produit de fonctions continues
   Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables ($x > 0$ pour le ln)
   $$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -2x\ln(x) - \frac{x^2}{x} \\ &= -x(2\ln(x) + 1)\end{aligned}$$
4. En 0, on calcule le taux d'accroissement : pour $x > 0$
   $$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = -x\ln(x) \to 0$$
   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\varphi \text{ est dérivable en 0 et } \varphi'(0^+) = 0 \\ \text{et sa courbe a un tangente horizontale en 0}\end{array}}$
5.

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$2\ln(x) + 1$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	
$-x$		$-$		$-$	
$\varphi'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

   (on résout de tête $2\ln(x) + 1 = 0$ puis on a le signe par le sens de variations)
6. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.
   $\varphi > 0$ sur $[0, 1/\sqrt{e}]$ et il n'y a pas de solution sur cet intervalle.
   $\varphi\left(\sqrt{2}\right) = 1 - 2\ln\left(\sqrt{2}\right) = 1 - \ln(2) > 0$
   $\varphi(2) = 1 - 4\ln(2) < 0$

et $\sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt{a}}$ donc φ est continue et strictement décroissante sur $\left]\sqrt{2},2\right[$ donc bijective de $\left]\sqrt{2},2\right[$sur $\left]\lim_2 \varphi, \lim_{\sqrt{2}} \varphi\right[$, intervalle qui contient 0.
Donc il existe un unique $\alpha \in \left]\sqrt{2},2\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
Et comme φ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$, il n'y a pas d'autres solutions et sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ non plus.

Conclusion : $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que : } \varphi(\alpha) = 0 \text{ et } \sqrt{2} < \alpha < 2.}$

7. $I = \int_0^\alpha \varphi(x)\, dx$

   φ est continue sur $[0,\alpha]$ donc I converge.
   Mais on ne peut pas la calculer en intégrant par parties sur $[0,\alpha]$ (dérivabilité de ln en 0)
   Soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\alpha \varphi(x)\, dx &= \int_\varepsilon^\alpha 1 - x^2 \ln(x)\, dx \\ &= [x]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha x^2 \ln(x)\, dx\end{aligned}$$

   soit $u(x) = \ln(x)$: $u'(x) = 1/x$ et $v'(x) = x^2$: $v(x) = x^3/3$ avec u et v de classe C^1 sur $[\varepsilon,\alpha]$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\alpha x^2 \ln(x)\, dx &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha \frac{x^3}{3x} dx \\ &= \frac{\alpha^3}{3}\ln(\alpha) - x^3\ln(x) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_\varepsilon^\alpha \\ &\to \frac{\alpha^3}{3}\ln(\alpha) - \frac{\alpha^3}{9}\end{aligned}$$

   et donc

$$\int_\varepsilon^\alpha \varphi(x)\, dx \to \alpha - \frac{\alpha^3}{3}\ln(\alpha) + \frac{\alpha^3}{9} = \int_0^\alpha \varphi(x)\, dx$$

   On se souvient que$\varphi(\alpha) = 1 - \alpha^2\ln(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2\ln(\alpha) = 1$ et $\alpha^3\ln(\alpha) = \alpha$ d'où

$$\begin{aligned}I &= \alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{9} \\ &= \frac{\alpha(6+\alpha^2)}{9}\end{aligned}$$

8. On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
   $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$,
   $\forall n \geq 0$, si $\varphi(a_n)\varphi\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$
   $\forall n \geq 0$, si $\varphi(a_n)\varphi\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$ alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$
   On reconnaît dans ce programme la méthode de dichotomie.
   Pour écrire un écrire un programme en Pascal calculant a_7 et b_7, il y a simplement à suivre la définition mathématique donnée pour l'écrire, en plaçant les termes successifs des suites a et b dans `a` et `b` , les réaffectation pour $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$ étant inutiles.

```
Program dicho ;
function phi(x :real) :real ;
```

```
begin
    if x>0 then phi :=1-x*x*ln(x) else phi :=1 ;
end ;
var a,b : real ; n :integer ;
begin
    a :=sqrt(2) ;b :=2 ;
    for n :=1 to 7 do
        if phi((a+b)/2)phi(a)<0 then b :=(a+b)/2 else a :=(a+b)/2 ;
writelen( a,b) ;
end.
```

PARTIE II. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

Rappelons que α est l'unique réel vérifiant $\varphi(\alpha)=0$.

1. Comme $x>0$ et $y>0$ pour $(x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ alors f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ comme produit et somme de fonctions de classe C^2.
2. On a : $f(x,y)=xy+\ln(x)\ln(y)$ donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y+\frac{1}{x}\ln(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+\ln(x)\frac{1}{y}$$
(x,y) est un point critique de f si et seulement si *les* deux dérivées partielles premières s'annulent :
$$\begin{cases} y+\dfrac{1}{x}\ln(y)=0 \\ x+\ln(x)\dfrac{1}{y}=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy+\ln(y)=0 \\ xy+\ln(x)=0\end{cases} L_1-L_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(y)-\ln(x)=0 \\ xy+\ln(x)=0\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(y)=\ln(x) \\ xy+\ln(x)=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2+\ln(x)=0\end{cases}$$
Dans l'équation $x^2+\ln(x)=0$ on repense à $1+-x^2\ln(x)=0$ dont α est solution.
On a $x^2+\ln(x)=0 \Longleftrightarrow x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=0 \Longleftrightarrow \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x}=\alpha$
Conclusion : $\boxed{\text{le point de coordonnées } \left(\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\alpha}\right) \text{ est l'unique point critique de } f \text{ sur }]0,+\infty[\times]0,+\infty[}$
3. On a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y+\frac{1}{x}\ln(y)\right)$$
$$=-\frac{1}{x^2}\ln(y)$$
et pour faire apparaître
$$\varphi\left(\frac{1}{y}\right)=1-\frac{1}{y^2}\ln\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$=1+\frac{1}{y^2}\ln(y) \text{ donc}$$
$$\ln(y)=y^2\left(\varphi\left(\frac{1}{y}\right)-1\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{1}{x^2}y^2\left(\varphi\left(\frac{1}{y}\right)-1\right)\\ &= \left(\frac{y}{x}\right)^2\left(1-\varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right)\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y+\frac{1}{x}\ln(y)\right)\\ &= 1+\frac{1}{xy}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x+\ln(x)\frac{1}{y}\right)\\ &= -\frac{\ln(x)}{y^2}\\ &= -\frac{1}{y^2}x^2\left(\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\\ &= \left(\frac{x}{y}\right)^2\left(1-\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)\end{aligned}$$

pour tous réels x et y strictement positifs.

4. Donc en $(x,y)=\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)$ on a :

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^2(1-\varphi(\alpha))\\ &= 1\\ s &= 1+\alpha^2\\ t &= 1\end{aligned}$$

Donc $rt-s^2 = 1-(1+\alpha^2)^2 = -\alpha^2(2+\alpha^2) < 0$
Donc, sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, la fonction f ne présente pas d'extremum local, ni global à fortiori !

EXERCICE 3

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.
Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :
- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Les positionnement sont déterminés par l'ensembles (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9.
   il y en a donc $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$
2. (H) est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables (on le suppose) donc $\mathrm{P}(H) = \dfrac{3}{84}$
   (V) est formé de 3 positionnements : colonne A, B ou C donc $\mathrm{P}(V) = \dfrac{3}{84}$
   (D) comporte es deux diagonales descendants et ascendantes. Donc $\mathrm{P}(D) = \dfrac{2}{84}$
3. (H, V, D, N) étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N) &= 1 - \mathrm{P}(V) - \mathrm{P}(H) - \mathrm{P}(D)\\ &= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21}\\ &= \frac{19}{21} \simeq 0.9048\end{aligned}$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance.
   Lors de la *ième* relance, la société peux gagner 2 euros (la mise) si N ou en perdre 18 sinon.
   Donc $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$. avec $\mathrm{P}(Z_i = 2) = \mathrm{P}(N) = \frac{19}{21}$ et $\mathrm{P}(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$, donc

$$\begin{aligned}E(Z_i) &= 2\frac{19}{21} - 18\frac{2}{21}\\ &= \frac{38 - 36}{21} = \frac{2}{21}\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1}$

   b) le gai total est la somme des gains à chaque relance donc $Z = \sum Z_i$ et $E(Z) = 10000 \cdot \frac{2}{21} \simeq 1000$
   Conclusion : En moyenne, la société gagnera à peu près 1000€ par jour, mais elle peut espérer beaucoup plus !

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de ,jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   a) X est le nombre de parties gagnées en 100 parties indépendantes, la probabilité de gagné chacune étant de $\frac{2}{21}$
   Conclusion : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right)}$
   b) on a donc $\boxed{E(X) = \frac{200}{21} \text{ et } V(X) = \frac{2}{21}\frac{19}{21}10}$

c) En p100 parties, X sont gagnées (gain $18X$) et $100 - X$ perdues (perte $2(100 - X)$)
La perte totale est donc $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$
(On peut compter différemment : il mise 200 et reçoit 20 par partie gagnée donc $20X$)
Conclusion : $\boxed{T = 200 - 20X}$

2. Avec n parties au lieu de 100, l'événement $U =$« gagner au moins une partie »est l'événement contraire de $(X = 0)$
$\mathrm{P}(X = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{2}{21}\right)^0\left(\frac{19}{21}\right)^n$
Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n &\geq 0.5 \\
\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n &\leq \frac{1}{2} \\
\iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) &\leq -\ln(2) \ \ (\text{attention } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0) \\
\iff n &\geq \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \simeq \frac{0,7}{0.1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{il faut jouer au moins 7 (ou 8) partie pour en gagner au moins une avec une probabilité supérieure à 50\%}}$

3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée . On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.

a) Tant que le joueur n'a pas gagné, il joue et gagne la suivante avec une même probabilité $\frac{2}{21}$
Donc Y est le rang sans mémoire de la première victoire et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{21}\right)$

b) On a donc $E(Y) = \dfrac{21}{2} \simeq 10$ et $V(Y) = \dfrac{19/21}{(2/21)^2} = \dfrac{19 \cdot 21}{4}$

c) « le joueur .joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois »est l'événement contraire de « le joueur perd les k premières parties »
qui s'écrit $P_1 \cap P_2 \dots P_k$ et dont la probabilité est $\mathrm{P}(P_1)\,\mathrm{P}_{P_1}(P_2)\cdots\mathrm{P}_{P_1\cap\dots\cap P_{k-1}}(P_k)$ avec P_i pour perdre la $i^{\text{ème}}$, le conditionnement donnant la continuation de ces mises ruineuses.
Donc

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$$

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in \,]0, 1[$.

1. Sachant Δ, les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes.
Il y a donc $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.
(H) est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_\Delta(H) = \mathrm{P}_\Delta(V) = \mathrm{P}_\Delta(D) = \dfrac{1}{28}}$

2. On a donc $P_\Delta(N) = 1 - \dfrac{3}{28} = \dfrac{25}{28}$

   Sachant $\overline{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie I et les probabilités sont donc celle de la partie I : $P_{\overline{\Delta}}(N) = \dfrac{19}{21}$

   $(\Delta, \overline{\Delta})$ est un système complet d'événement donc

$$\begin{aligned}
P(N) &= P_{\overline{\Delta}}(N) \cdot P(\Delta) + P_\Delta(N) \cdot P(\Delta) \\
&= x\frac{25}{28} + (1-x)\frac{19}{21} \\
&= x\frac{25}{4\cdot 7} + (1-x)\frac{19}{3\cdot 7} \\
&= \frac{25\cdot 3 - 19\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 7}x + \frac{19}{21} \\
&= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à } P(N) = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}}$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. On a donc $P(G = 2) = P(N)$ et $P(G = -18) = P(\bar{N}) = 1 - P(N)$

   Donc

$$\begin{aligned}
E(G) &= 2\left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18\left(1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21}\right) \\
&= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21}
\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
E(G) > 0 &\Longleftrightarrow -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0 \\
&\Longleftrightarrow x < \frac{2}{21}\frac{84}{20} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{le gain moyen reste positif tant que } x < \dfrac{2}{5}}$

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés.

   la fonction aléatoire a été déréglée si Δ

   On cherche donc $P_{\bar{N}}(\Delta)$ par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
P_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{P(\Delta \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} \\
&= \frac{P(\Delta)\, P_\Delta(\bar{N})}{P(\bar{N})} \\
&= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right)} \\
&= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été déréglée avec une probabilité } \dfrac{9x}{x+8}}$