EXERCICE 1

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3\mathbb{R}$ telle que :

$$L = AL + B.$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$$

1. Pour $n = 0$:
   $L + A^0(U_0 - L) = L + U_0 - L = U_0$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = L + A^n(U_0 - L)$ alors
   $$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n + B \\ &= A[L + A^n(U_0 - L)] + B \\ &= AL + A^{n+1}(U_0 - L) + B \\ &= L + A^{n+1}(U_0 - L) \end{aligned}$$
   car $AL + B = L$
   Conclusion : $\boxed{U_n = L + A^n(U_0 - L) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$
   Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :
   $$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
   On note :
   - Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
   - a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ;
   - b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B ;
   - $\mathrm{Im}(b)$ l'image de l'endomorphisme b ;
   - $\mathrm{Im}(Id - a)$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{Id} - a$.
2. Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si
   $$-x + y + z = 0$$
   La question n'est pas classique en ECE.
   <u>On peut l'attaquer par la voie habituelle :</u>
   $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Vect}((3,1,2), (-1,0,-1), (-2,-1,-1))$ et comme $(3,1,2)+(-1,0,-1)+(-2,-1,-1) = 0$ alors
   $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Vect}((-1,0,-1), (-2,-1,-1))$
   et on reprend par l'équation $:-x + y + z = 0 \iff x = y + z$ qui a pour solutions : $E = \mathrm{Vect}((1,1,0), (1,0,1))$
   Reste à montrer l'égalité des deux. Les familles génératrices sont libres (2 vecteurs non proportionnels). Les deux sous espaces sont donc de dimension 2.

de plus $(-1,0,-1)$ et $(-2,-1,-1)$ satisfont l'équation $-x+y+z=0$ donc
$\mathrm{Im}\,(b)\subset E$ et comme les deux ont même dimension $\mathrm{Im}\,(b)=E$.
La méthode systématique est de déterminer à quelles conditions (x,y,z) appartient à $\mathrm{Im}\,(b)$:
si il existe (α,β,γ) tel que $b\left((\alpha,\beta,\gamma)\right)=(x,y,z)$ ce que l'on résout :

$$B\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{c}3\alpha-\beta-2\gamma=x\\\alpha-\gamma=y\\2\alpha-\beta-\gamma=z\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}\alpha=y+\gamma\\3\left(y+\gamma\right)-\beta-2\gamma=x\\2\left(y+\gamma\right)-\beta-\gamma=z\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{c}\alpha=y+\gamma\\\beta=-x+3y+\gamma\\2\left(y+\gamma\right)-\left(-x+3y+\gamma\right)-\gamma=z\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}\alpha=y+\gamma\\\beta=-x+3y+\gamma\\-y+x=z\end{array}\right.$$

On peut donc trouver (α,β,γ) (infinité de valeurs suivant $\gamma\in\mathbb{R}$) si et seulement si $-x+y+z=0$
Pour $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a)$ on détermine sa matrice dans la base canonique :

$$I-A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-3&-3\\4&0&-4\\2&-3&1\end{pmatrix}$$

Avec la première colonne qui est l'opposé de la somme des deux dernières. $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a)=\mathrm{Vect}\left((-3,0,-3),(-3,-4,1)\right)$
Famille libre et génératrice donc base de $\mathrm{Im}\,(Id-a)$ et $\dim\left(Id-a\right)=2$
de plus $(-3,0,-3)$ et $(-3,-4,1)$ satisfont l'équation $-x+y+z=0$ donc appartiennent à $Im\,(b)$ donc
$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a)\subset\mathrm{Im}\,(b)$ et ils ont la même dimension
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}\,(b)=\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a)}$

3. Soit $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

   On doit montrer que les colonnes sont propres et forment une base :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&3&3\\-4&6&4\\-2&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

   donc $(1,1,1)\neq0$ est vecteur propre de a associé à la valeur propre 1.

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&3&3\\-4&6&4\\-2&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

   Donc $(1,0,1)$ est vecteur propre de a associé à la valeur propre $\dfrac{1}{2}$.

$$A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&3&3\\-4&6&4\\-2&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

   0Donc $(0,-1,1)$ est vecteur propre de a associé à la valeur propre $\dfrac{1}{3}$
   Comme les 3 valeurs propres de a endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, (dimension 3)sont distinctes, alors $\mathcal{C}=\left((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}P\text{ la matrice de passage de la base canonique de }\mathbb{R}^3\\\text{à une base de vecteurs propres de }a.\end{array}}$

4. Les vecteurs étant propre, la matrice de a dans cette base est $D = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

   On calcule leurs images par b : (si on nous avait fait calculer P^{-1}, on aurait aussi pu passer par la formule de changement de base)

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   donc $b((1,1,1)) = 0$ coordonnées : $(0,0,0)$ dans C

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   donc $b(1,0,1) = (1,0,1)$ coordonnées $(0,1,0)$ dans :$\mathcal{C}$

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   donc $b(0,-1,1) = (-1,-1,0)$ et on cherche ses coordonnées sur $((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1))$:

$$(-1,-1,0) = x(1,1,1) + y(1,0,1) + z(0,-1,1) \iff \left\{\begin{array}{c} x+y=-1 \\ x-z=-1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} y=-1-x \\ z=x+1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

   Donc $(-1,-1,0) = -(1,0,1) + 1(0,-1,1)$ et a pour coordonnées $(0,-1,1)$ dans $\mathcal{C}$

   Conclusion : $\boxed{B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

5. d'après la formule de changement de base, $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(a) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\,\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(a)\,\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = PD^nP^{-1}$.

   Pour $n=0$: $PD^0P^{-1} = I = A^0$

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$ alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ A^n = PD^nP^{-1}}$

6. On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$ et avec

   $E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a donc

$$\begin{aligned} A^n &= P\left(E' + \left(\frac{1}{2}\right)^n F' + \left(\frac{1}{3}\right)^n G'\right)P^{-1} \\ &= E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G \end{aligned}$$

   avec $E = PE'P^{-1}$ et de même pour F et G.

   Il reste donc à calculer P^{-1} :

$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{matrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$:

$\iff \begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1+L_2\\-L_2\\L_3\end{matrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1+L_3\\L_2-L_3\\L_3\end{matrix} \begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

et

$$\begin{aligned}E &= \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} P^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

7. Soit $L' = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&p&q\\0&0&r\end{pmatrix}$

   $DL' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&p&q\\0&0&r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{2}p&\frac{1}{2}q\\0&0&\frac{1}{3}r\end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

   Donc $L' = DL' + B' \iff \begin{cases} p = \frac{1}{2}p + 1\\ q = \frac{1}{2}q - 1\\ r = \frac{1}{3}r + 1\end{cases} \iff \begin{cases} p = 2\\ q = -2\\ r = \frac{3}{2}\end{cases}$

   et $L' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$

$$L' = DL' + B'$$

8. Comme $A = PDP^{-1}$ et que $B = PB'P^{-1}$ (changement de base) alors

$$\begin{aligned}PL'P^{-1} &= PDPP^{-1}L'P^{-1} + PB'P^{-1}\\ &= AL + B\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{L = AL + B.}$

9. On passe par les matrices associées dans $\mathcal{C}$:

$$E'L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = 0$$

et donc $EL = PE'P^{-1}PL'P^{-1} = PE'L'P^{-1} = 0$

10. On a $U_n = L + A^n (U_0 - L)$ avec $A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G$
On a $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et de même $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ donc comme sommes et produit, leurs limites (termes d'un produit de matrices) $L + A^n (U_0 - L)$ tend vers $L + E(U_0 - L) = L + EU_0 - EL$ et comme $EL = 0$ alors
Conclusion : chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

Conclusion : exercice calculatoire, question sur Im incongrue. Fausse piste entre 8 et 9

EXERCICE 2.

Partie I. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. On a $e^h = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)\right)}{x} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + x\varepsilon_2(x) \ \text{ (DL d'ordre 1)} \end{aligned}$$

Donc $f(x) \to 1 = f(0)$ quand $x \to 0^+$ et f est continue en 0^+.
De plus, f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient ($x \neq 0$) de fonctions continues.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$

2. Le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{1 - \frac{1}{2}x + x\varepsilon_2(x) - 1}{x} \\ &= -\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x) \\ &\to -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \frac{-1}{2}}$

3. Comme $x \neq 0$, alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour $x > 0$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}x - (1 - e^{-x})}{x^2}$$

donc avec $\varphi(x) = e^{-x}(x + 1) - 1$ on a

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\varphi'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = -xe^{-x}$$

x	0		
$\varphi'(x)$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow -$	
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

et en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x} \to 1}{x \to +\infty} \to 0$$

on a Étudier les variations de φ;. En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$$

1. Pour minorer l'intégrale, on travaille sur le contenu. D'où peut venir le ln ? D'où viendra le $\frac{1}{e}$?
   Pour tout $u \in [0, n]$: $-u/n \geq -n/n = -1$ donc $e^{-u/n} \geq e^{-1}$ et $\frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} \geq \frac{1}{1+u}$.
   Comme les bornes sont croissantes on a alors
   $$\int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du \geq \int_0^n \frac{e^{-1}}{1+u} du = \frac{1}{e}\left[\ln(1+u)\right]_0^n$$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul } u_n \geq \frac{1}{e}\ln(n+1) \text{ et par minoration } u_n \to +\infty}$
2. f est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe
3. On fait réapparaître l'intégrale pour u_n : a Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$\begin{aligned}\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n &= \int_0^n \frac{1}{1+u} du - \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u} du \\ &= \int_0^n \frac{1 - e^{-u/n}}{1+u} du\end{aligned}$$
   On fait le changement de variable $x = u/n \Longleftrightarrow u = nx$: $du = ndx$: $u = 0 \Longleftrightarrow x = 0$: $u = n \Longleftrightarrow x = 1$ donc
   $$\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^1 n\frac{1-e^{-x}}{1+nx} dx$$
   que l'on majore à nouveau : pour tout $x > 0$: $1 + nx > nx$ donc $\dfrac{n}{1+nx} \leq \dfrac{n}{nx} = \dfrac{1}{x}$ d'où
   $$n\frac{1-e^{-x}}{1+nx} \leq f(x)$$

et comme intégrales de fonctions continues par morceaux, (ou en vérifiant l'inégalité également pour $x = 0$)

$$0 \leq \int_0^1 n\frac{1-e^{-x}}{1+nx}dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx$$

car $1 - e^{-x} \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et

Conclusion : $\boxed{0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u}du - u_n \leq \int_0^1 f(x)\,dx}$

4. On a finalement

$$0 \leq \ln(n+1) - u_n \leq \int_0^1 f(x)\,dx$$

$\int_0^1 f(x)\,dx$ étant une constante par rapport à n. Donc

$$0 \leq 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{\ln(n+1)}$$

et par encadrement, $1 - \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} \to 0$ et $\dfrac{u_n}{\ln(n+1)} \to 1$

Conclusion : $\boxed{u_n \sim \ln(n+1) \text{ quand } n \to +\infty}$

Bilan : exercice progressif et qui demande des initiatives.

EXERCICE 3.

Soit n un entier naturel non nul. Une entreprise dispose d'un lot du n feuilles originales qu'elle a numérotées $l,\ 2,\ \cdots,\ n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant . suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est alors chargée du travail suivant : elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la, boite et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$. Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boite lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).

On considère l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité c'est-à-dire que $a_n = \mathrm{P}(A_n)$.

1. il y a $2n$ feuilles dans la boite.

   Les premières pioches sont (ni ordre ni répétition) les combinaisons de deux feuilles parmi $2n$. (équiprobables) Il y en a $\dbinom{2n}{2} = \dfrac{2n(2n-1)}{2}$

   Les pioches formant un couple sont déterminées par la feuille originale (parmi n) il y en a n

   Donc $\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right) = \dfrac{n}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{1}{2n-1}$ et $\mathrm{P}(A_n) = 1 - \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{2n-2}{2n-1}$

   Conclusion : $\boxed{a_n = \dfrac{2n-2}{2n-1}}$

2. <u>Étude de T_2</u>. On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.

a) Pour vider la boite, il faut et suffit d'avoir d'abord un premier couple, les feuilles restantes seront alors agrafées à la pioche suivante.
Donc $(T_2 = k)$ signifie que l'on n'a pas eu de couple jusqu'à $k-1$, et que l'on en a eu un à la $k-1^{ème}$ pioche.
En notant S_i (succès) le fait d'avoir un couple à la $i^{ème}$ pioche et E_i sinon, on a donc :

$$\begin{aligned}(T_2 = k) &= E_1 \cap \cdots S_{k-1} \text{ et}\\ \mathrm{P}(T_2 = k) &= \mathrm{P}(E_1)\,\mathrm{P}_{E_1}(E_2)\cdots \mathrm{P}_{E_1\cdots E_{k-2}}(S_{k-1})\end{aligned}$$

Tant que l'on n'a pas eu de couple, on est avec une boite contenant les 4 feuillets et la probabilité de ne pas piocher un couple est donc a_2.
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k \geq 2 : \mathrm{P}(T_2 = k) = (1-a_2)(a_2)^{k-2}}$

b) $S_2 = T_2 - 1$
Donc $S_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(S_2 = k) = (T_2 = k+1)$ donc $\mathrm{P}(S_2 = k) = (1-a_2)(a_2)^{k-1}$
Conclusion : $\boxed{S_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a_2)}$
donc $E(S_2) = \dfrac{1}{1-a_2}$ et $V(S_2) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}$
et comme $T_2 = S_2 + 1$ alors $V(T_2) = V(S_2)$ et $E(T_2) = E(S_2) + 1$
Conclusion : $\boxed{E(T_2) = \dfrac{2+a_2}{1-a_2} \text{ et } V(T_2) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}}$

3. Étude de T_3. On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boite, contient trois originaux et trois copies.

a) Comme il y a 3 paires à reformer , $(T_3 = 2)$ est impossible et $\mathrm{P}(T_3 = 2) = 0$
$(T_3 = 3)$ signifie que l'on a fait des paires à chaque pioche :
Donc $(T_3 = 3) = S_1 \cap S_2$ (on a alors S_3) et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_3 = 3) &= \mathrm{P}(S_1)\,\mathrm{P}_{S_1}(S_2)\\ &= (1-a_3)(1-a_2)\end{aligned}$$

car quand on a fait le premier couple, il reste 4 feuilles.

b) $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ est un système complet d'événements, donc pour tout $k \geq 2$ (impossible sinon) que :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_3 = k+1) &= \mathrm{P}_{A_3}(T_3 = k+1)\,\mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)\,\mathrm{P}\left(\overline{A_3}\right)\\ &= a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k)\end{aligned}$$

avec $\mathrm{P}_{A_3}(T_3 = k+1) = \mathrm{P}(T_3 = k)$ car, quand on n'a pas fait de couple au premier on est encore avec les 6 feuillets dans la boite et il ne reste que k pioches à faire pur finir en $k+1$ picoches.
et $\mathrm{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1) = \mathrm{P}(T_2 = k)$ car un couple ayant été agrafé, il ne reste que 2 coules dans la boites et k pioches à faire pour la vider.

c) Courageusement, par récurrence :
Pour $k = 2$:

$$\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^0 - (a_2)^0\right] = \mathrm{P}(T_3 = 2)$$

Soit $k \geq 2$.tel que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_3 = k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \text{ alors} \\
\mathrm{P}(T_3 = k+1) &= a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k) \\
&= a_3\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] + (1-a_3)(1-a_2)(a_2)^{k-2} \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[a_3(a_3)^{k-2} - a_3(a_2)^{k-2} + (a_2)^{k-2}(a_3 - a_2)\right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-1} - (a_2)^{k-1}\right]
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \geq 2, \quad \mathrm{P}(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].}$

d) On doit trouver 1 !

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{M}\mathrm{P}(T_3 = k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\sum_{k=2}^{M}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\sum_{h=0}^{M}\left[(a_3)^{h} - (a_2)^{h}\right] \\
&\to \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[\frac{1}{1-a_3} - \frac{1}{1-a_2}\right] \text{ car } |a_3| < 1 \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[\frac{a_2 - a_3}{(1-a_3)\,1 - a_2}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty}\mathrm{P}(T_3 = k) \text{ et } T_3 \text{ est bien une variable aléatoire}}$

e) Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{M}(k-1)\,\mathrm{P}(T_3=k)\\
&=\sum_{k=2}^{M}(k-1)\,\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{h=1}^{M-1}h\,(a_3)^{h-1}-h\,(a_2)^{h-1}\\
&\to\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2)^2-(1-a_3)^2}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2-1+a_3)(1-a_2+1-a_3)}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(a_3-a_2)(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}\right]\\
&=\frac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)}=E(T_3-1)
\end{aligned}$$

La série est absolument convergente, donc T_3-1 admet une espérance et calculer $E(T_3-1)=\dfrac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)}$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } T_3 \text{ a une espérance et } E(T_3)=\dfrac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)}+1}$

f) De même (presque ...)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{M}k\,(k-1)\,\mathrm{P}(T_3=k)\\
&=\sum_{k=2}^{M}k\,(k-1)\,\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{M}k\,(k-1)\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&\to\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{2}{(1-a_3)^3}-\frac{2}{(1-a_2)^3}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2)^3-(1-a_3)^3}{(1-a_3)^3(1-a_2)^3}\right]
\end{aligned}$$

et on doit retravailler d'abord

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

pour simplifier

$$
\begin{aligned}
E\left[T_3\left(T_3-1\right)\right] &= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2}\left[\frac{\left(1-a_2-1+a_3\right)\left[\left(1-a_2\right)^2+\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)+\left(1-a_3\right)^2\right]}{\left(1-a_3\right)^3\left(1-a_2\right)^3}\right] \\
&= \frac{a_2^2-2a_2+1+1-a_2-a_3+a_2a_3+1-2a_3+a_3^2}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2} \\
&= \frac{a_2^2+a_2a_3-3a_2+a_3^2-3a_3+3}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2}
\end{aligned}
$$

car la série est absolument convergente
$T_3\left(T_3-1\right)=T_3^2-T_3$ donc $T_3^2=T_3\left(T_3-1\right)+T_3$ a une espérance et

$$
\begin{aligned}
E\left(T_3^2\right) &= E\left[T_3\left(T_3-1\right)\right]+E\left(T_3\right) \\
&= \frac{a_2^2+a_2a_3-3a_2+a_3^2-3a_3+3}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2}+\frac{\left(2-a_2-a_3\right)}{\left(1-a_3\right)\left(1-a_2\right)}+1
\end{aligned}
$$

donc T_3a une variance et

$$
V\left(T_3\right)=E\left(T_3^2\right)-E\left(T_3\right)^2
$$

et là l'énoncé ne demande pas son expression ... donc on s'arrête

Bilan : le début est déroutant, mais en restant formel (ce à quoi poussait l'énoncé) les calculs ne sont pas monstrueux.