1 Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$ et $R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ et $f(M) = AM + MA$

1. Racines de R' : R est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $R'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$
   on peut chercher les racines par le discriminant ou constater que $R'(1) = 0$ et $R'(3) = 0$
   Conclusion : $\boxed{R' \text{ a deux racines distinctes : 1 et 3}}$
2. En $\pm\infty$: $R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = x^3(1 - 6/x + 9/x^2 - 3/x^3) \to \pm\infty$
   En 1 : $R(1) = 1$
   En 3 : $R(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$	
$R'(x)$		$+$			0	$-$	0	$+$		$2°$ degré
$R(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$	

3. Par bijection : On récite
   Sur $]0,1[$, R est continue et strictement croissante
   donc bijective de $]0,1[$ dans $]\lim_{-\infty} R, \lim_1 R[=]-3,1[$.
   De plus $0 \in]-3,1[$ donc l'équation $R(x) = 0$ a une unique solution $a \in]0,1[$
   de même elle a une unique solution $b \in]1,3[$ et $c \in]3,+\infty[$
   Et par son sens de variation, elle n'a pas de racine sur $]-\infty,0]$
   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} R(x) = 0 \text{ a trois solutions } a,\ b \text{ et } c\text{sur } \mathbb{R} \\ \text{avec } 0 < a < 1 < b < 3 < c \end{array}}$
4. $AX_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 6\lambda^2 - 9\lambda + 3 \end{pmatrix}$
   ASTUCE : et on reconnaît $6\lambda^2 - 9\lambda + 3 = \lambda^3 - R(\lambda)$
   Si X_λ est vecteur propre associé à une valeur α alors $AX_\lambda = \alpha X_\lambda$ et $\alpha = \lambda$ (test sur la première composante)
   Donc (3ème composante) $\lambda \times \lambda^2 = 6\lambda^2 - 9\lambda + 3$ a**lors** $R(\lambda) = 0$
   Réciproquement si $R(\lambda) = 0$ alors $X_\lambda \neq 0$ est une vecteur propre associé à la valeur propre λ
   Conclusion : $\boxed{X_\lambda \text{ colonne propre} \iff R(\lambda) = 0}$
5. Comme R a trois racines , b et c distinctes, A a donc trois valeurs propres distinctes.
   Donc A est diagonalisable et la juxtaposition de vecteurs pourpres X_a, X_b et X_c associés forme une base de vecteurs propres.
   Donc avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ on a $A = PDP^{-1}$

6. Pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = AM + MA$ est calculable et appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
Donc f est une application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et
Pour M et $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et α et $\beta \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) + (\alpha M + \beta N) A \\ &= \alpha(AM + MA) + \beta(AN + NA) = \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}$
$$\begin{aligned} f(M) = 0 &\iff AM + MA = 0 \\ &\iff PDP^{-1}PM'P^{-1} + PM'P^{-1}PDP^{-1} = 0 \\ &\iff P(DM' + M'D)P^{-1} = 0 \\ &\iff DM' + M'D = 0 \end{aligned}$$
car P est inversible
7. On calcule $DN + ND$
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap & aq + bq & ar + cr \\ as + bs & 2bt & bu + cu \\ av + cv & bw + cw & 2cx \end{pmatrix}$$
$DN + ND = 0$ alors
$$\begin{cases} 2ap = 0 & (a+b)q = 0 & (a+c)r = 0 \\ (a+b)s = 0 & 2bt = 0 & (b+c)u = 0 \\ (a+c)v = 0 & (b+c)w = 0 & 2cx = 0 \end{cases}$$
et comme a, b et $c > 0$ leurs sommes sont non nulles et tous les coefficients de N sont nuls.
8. Comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie, f bijective$\iff \ker(f) = \{0\}$
Si $M \in \ker(f)$ alors $DN + ND = 0$ alors $N = 0$ donc $M = 0$
Donc $\ker(f) \subset \{0\}$ et $\ker(f) = \{0\}$
Conclusion : $\boxed{f \text{ est donc un isomorphisme de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Catégorie : Equation matricielle
Niveau : 2
Conclusion : Exercice progressif, avec un peu de théorie. Demande une capacité d'abstraction

2 Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}^* : \varphi(x) = \dfrac{x\ln(x) - 1}{x}$
et pour $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[: f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{2} + \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

2.1 Etude des zéros de φ

1. En $0^+ : \varphi(x) = \dfrac{x\ln(x) - 1}{x}$ avec $\varphi(x) = x\ln(x) \to 0$ (usuelle) ou
croissance comparée, pour un quotient$\varphi(x) = \dfrac{\ln(x)}{1/x} \to 0$ car $\ln(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$
Donc : $\varphi(x) = \dfrac{x\ln(x) - 1}{x} \to -\infty$
La courbe de φ a donc une asymptote verticale en 0

2. En $+\infty$: $\varphi(x) = \dfrac{x\ln(x)-1}{x} = \ln(x)\left(1-\dfrac{1}{x\ln(x)}\right) \to +\infty$

   $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{x\ln(x)-1}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x}\left(1-\dfrac{1}{x\ln(x)}\right) \to 0$ (on factorise par les prépondérant au numérateur)

   Et la courbe de φ a une branche parabolique horizontale.

3. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x > 0$ et $x \neq 0$, donc, par opérations, φ est dérivable et

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{(\ln(x)+1)x - (x\ln(x)-1)}{x^2}\\ &= \frac{x+1}{x^2} > 0\end{aligned}$$

4.

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. φ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

   Donc φ est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]\lim_0 \varphi \lim_{+\infty} \varphi[= \mathbb{R}$

   De plus $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$

   Comme $\varphi(1) = -1 < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(e)$ et que φ est strictement croissante alors

   Conclusion : $\boxed{\alpha \in]1,e[}$

2.2 Etude d'une suite réelle

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n \end{cases}$$

1. Deux questions : existence et $u_n > \alpha$, u_{n+1} existera si $\varphi(u_n)$ existe, c'est à dire si $u_n > 0$

   Recopier dans l'HR l'existence de u_n!

   Par récurrence :

   $u_0 = e$ existe et $u_0 \geq e > \alpha$

   Soit n tel que u_n existe et $u_n > \alpha$

   Alors $u_n > 0$ donc u_{n+1} existe et (φ croissante strictement)

   $\varphi(u_n) > \varphi(\alpha)$ donc $\varphi(u_n) + u_n > \varphi(\alpha) + \alpha = \alpha$

   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_n \text{ existe et } u_n > \alpha\end{array}}$

2. **Idée :** Pour utiliser $\varphi(L) + L = L$, il faut la continuité de $x \longmapsto \varphi(x) + x$, et donc isoler L de 0.

   Si la suite converge vers une limite L, comme $u_n > \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $L \geq \alpha$ (inégalité large à la limite!)

   donc φ continue en L et $\varphi(L) + L = L$

   $\boxed{\textbf{Donc } L = \alpha}$

3. Comme $u_n > \alpha$ alors $\varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0$ (car φ croissante) et $u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n > u_n$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. Si elle est convergente alors sa limite est $L = \alpha$

   Mais, $u_n \geq u_0$ (suite croissante) donc $L \geq u_0 = e > \alpha$ contradiction

   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc la suite n'est pas convergente} \\ \text{et, croissante, } u_n \to +\infty\end{array}}$

5. Il faut calculer u_n et n (c'est lui que l'on affiche !) jusqu'à ce que $u_n \geq A$ (tant que $u_n < A$)
   Le fonction est $g(x) = \varphi(x) + x$ qui passe au suivant.
   Ne pas oublier les parenthèses pour la fraction
   ```
   g :=(x*ln(x)-1)/x+x
   ```
   et ensuite
   ```
   while u<A do
   begin
       u :=g(u) ;
       n :=n+1 ;
   end ;
   writeln(n)
   ```

2.3 Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{2} + \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

1. Comme $x \neq 0$ et $x^2 \neq 0$,par opérations, f est C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$
2. On calcule
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2}{x^3} + \frac{y}{x^2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^3}\left(-2 + xy + x\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{1}{x} + y\end{aligned}$$
   Solution : $-\dfrac{2}{x^3}e^{-\dfrac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^4}e^{-\dfrac{1}{x}} - \dfrac{2}{x^3}y + \dfrac{6}{x^4}$
   $A(x,y)$ est un point critique si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ et par substitution
   $\iff \begin{cases} -2 + 1 + x\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} -1 + x\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$
   On transforme la première équation pour faire apparaître α qui est racine de $\dfrac{x\ln(x) - 1}{x} = 0$
   $\iff x\ln(x) = 1 \iff \ln(x) = \dfrac{1}{x} \iff x = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) \iff x\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1$
   $\iff -1 + x\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$
   $\boxed{\text{Donc le seul point critique de } f \text{ est } A\left(\alpha, \dfrac{1}{\alpha}\right) \text{ avec } y_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}}$
3. On calcule les dérivées secondes :
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{+6}{x^4} - \frac{2y}{x^3} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^4} - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 1\end{aligned}$$

En $A\left(\alpha, \dfrac{1}{\alpha}\right)$, on a donc

$$\begin{aligned} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) &= \frac{+6}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^4} + \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha^4} - \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{2}{\alpha^3} \\ &= \frac{4}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^4}\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{2}{\alpha^3}\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

reste à faire disparaître les $\exp\left(\dfrac{-1}{\alpha}\right)$ par $\exp\left(\dfrac{-1}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\alpha}$ (une des équations qui caractérisent α) donc

$$\begin{aligned} r &= \frac{4}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^5} - \frac{2}{\alpha^4} \\ &= \frac{2\alpha+1}{\alpha^5} \end{aligned}$$

4. de plus $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \dfrac{1}{\alpha^2}$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 1$

   Donc

$$\begin{aligned} rt - s^2 &= \frac{2\alpha+1}{\alpha^5} - \frac{1}{\alpha^4} \\ &= \frac{\alpha+1}{\alpha^5} > 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc, sur l'ouvert, } f \text{ a un extremum local en } A \text{ qui est un minimum car } t > 0}$

Catégorie : Suite récurrente, fonction de deux variables
Niveau : 2
Conclusion : Exercice complet, calculatoire pour les dérivées secondes

3 Exercice 3

n boules noires et b boules blanches.
Joueur A Tirages sans remise jusqu'à obtenir une blanche.
Avec les boules restantes,
Joueur B Tirages avec remise jusqu'à obtenir la blanche restante.
X : nombre de noires tirées par A
Y : nombre de noires tirées par B

3.1 Etude d'un cas particulier $b = n = 2$

IL y a donc au départ, 4 boules dans l'urne.

1. **On travaille d'abord sur les événements !**
   Avec les codages usuels : B_1 pour blanc au premier tirage
   $[X = 0] = B_1$ donc $\mathrm{P}(X = 0) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ (boules présentent équiprobables)
   $[X = 1] = N_1 \cap B_2$ donc $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(N_1)\,\mathrm{P}_{N_1}(B_2) = \dfrac{2}{4}\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$
   Si N_1, il reste $1N$ et $2B$ pour le second tirages
   $[X = 2] = N_1 \cap N_2 \cap B_3$ donc $\mathrm{P}(X = 2) = \dfrac{2}{4}\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{6}$

2. On vérifie la cohérence :

k	0	1	2	
$\mathrm{P}(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\sum = 1$
$k\,\mathrm{P}(X=k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$E(X) = \frac{2}{3}$
$k^2\,\mathrm{P}(X=k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$E(X^2) = 1$

et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{5}{9}$

3. Les tirages de B dépendent de ceux de A : probabilités totales
$(X = 0, X = 1, X = 2)$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=0) &= \mathrm{P}(X=0)\,\mathrm{P}_{X=0}(Y=0) + \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}_{X=1}(Y=0) + \mathrm{P}(X=2)\,\mathrm{P}_{X=2}(Y=0) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}_{2N1B}(Y=0) + \frac{1}{3}\mathrm{P}_{1N1B}(Y=0) + \frac{1}{6}\mathrm{P}_{1B}(Y=0) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{6}1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Car le conditionnement nous donne le contenu de l'urne pour les tirages de B.

4. $\mathrm{P}(X = 0 \cap Y = i) = \mathrm{P}(X = 0)\,\mathrm{P}_{X=0}(Y = i)$
Quand $X = 0$, B effectue des tirages sans mémoire parmi $1B$ et $2N$,
Donc le nombre de tirage pour obtenir une blanche qui est $Y + 1_{/X=0} \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et

$$\boxed{\mathrm{P}(X=0\cap Y=i) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{1}{3}}$$

de même $\boxed{\mathrm{P}(X=1\cap Y=i) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i\dfrac{1}{2}}$

Mais quand $X = 2$, il ne reste qu'une blanche et pas de noires donc

$$\boxed{\mathrm{P}(X=2\cap Y=0) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathrm{P}(X=2\cap Y=i) = 0 \text{ si } i \geq 1}$$

5. On a donc une expression différente pour $Y = 0$:

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{P}(Y=0) = \dfrac{1}{2} \\ \text{et pour } i \geq 1 : \mathrm{P}(Y=i) = \dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^i + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i\right] \end{array}}$

dont on teste la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}(Y=i) &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&\to \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1
\end{aligned}$$

attention à la borne inférieure qui n'est pas 0 !

6. La convergence de $\sum_{i\geq 0} i\,\mathrm{P}(Y=i)$ équivaut à l'absolue convergence (tout est positif)

$$\sum_{i=0}^{n} i\,\mathrm{P}(Y=i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i} + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$$
$$\to \frac{1}{6}\frac{\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^{2}} + \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}} = \frac{4}{3}$$

convergente car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Donc la série est absolument convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } Y \text{ a une espérance et } E(Y) = \frac{4}{3}}$

3.2 Retour au cas général

1. Les valeurs de X sont $X(\Omega) = [[0,n]]$

Et pour $k \in [[0,n]]$, $(X=k) = N_1 \cap \cdots \cap N_k \cap B_{k+1}$ donc

$$\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(N_1)\cdots \mathrm{P}_{N_1\cdots N_{k-1}}(N_k) \times \mathrm{P}_{N_1\cdots N_{k-1}}(B_{k+1})$$
$$= \frac{n}{n+b}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+b} \times \frac{b}{n-k+b}$$

car le conditionnement donne le nombre de boules noires restantes.

On le réécrit avec des factorielles :

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{\frac{(n+b)!}{(n-k+b-1)!}}b = \frac{n!\,(n-k+b-1)!}{(n+b)!\,(n-k)!}b$$

que l'on compare à la forme proposée :

$$\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = \frac{\frac{(n-k+b-1)!}{(b-1)!(n-k)!}}{\frac{(n+b)!}{b!n!}} = \frac{b!n!\,(n-k+b-1)!}{(n+b)!\,(b-1)!\,(n-k)!}$$
$$= \mathrm{P}(X=k)$$

car $b! = (b-1)!b$

2. Comme X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = [[0,n]]$, on a donc $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X=k) = 1$ et comme $\binom{n+b}{b}$ est constante par rapport à k, on peut factoriser hors de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$$

que l'on réindexe par $h = n-k$ **qui inverse l'ordre d'indexation**

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{h+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$$

3. Soient $k \geq 1$ et $N \geq 1$ alors $k! = k\,(k-1)!$ car $k-1 \geq 0$ et

$$\begin{aligned} k\binom{k+a}{a} &= k\frac{(k+a!)}{a!k!} = \frac{(k+a!)}{a!\,(k-1)!} \\ &= (a+1)\,\frac{(k+a!)}{(a+1)!\,(k-1)!} \\ &= (a+1)\binom{k+a}{a+1} \end{aligned}$$

Donc (on ne peut substituer que pour $k \geq 1$: sur $\sum_{k=1}^{N}$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} &= 0 + \sum_{k=1}^{N}(a+1)\binom{k+a}{a+1} \text{ réindexé } h = k-1 \\ &= (a+1)\sum_{h=0}^{N-1}\binom{h+a+1}{a+1} \end{aligned}$$

et on substitue $N-1$ à N et $a+1$ à a dans la formule ci dessus pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{N+a+1}{a+2}$$

4. **Subtile :** Par le th de transfert : $E(n-X) = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\,\mathrm{P}(X=k)$ ne fait pas apparaître la somme précédente.
On revient donc à la définition $E(n-X) = \sum_{h=0}^{n} h\,\mathrm{P}(n-X=h)$ car $(n-X)(\Omega) = [0,n]$

$$\begin{aligned} E(n-X) &= \sum_{h=0}^{n} h\,\mathrm{P}(X=n-h) \\ &= \sum_{h=0}^{n} h\frac{\binom{h+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \text{ et avec } a = b-1 \\ &= \binom{n+b}{b}^{-1}\sum_{h=0}^{n} h\binom{h+b-1}{b-1} \\ &= \binom{n+b}{b}^{-1} b\binom{n+b}{b+1} \\ &= \frac{b!n!}{(n+b)!}b\frac{(n+b)!}{(b+1)!\,(n-1)!} \\ &= \frac{nb}{b+1} \text{ car } n! = n\,(n-1)! \end{aligned}$$

et comme $E(n-X) = n - E(X)$ alors $\boxed{E(X) = n - \frac{nb}{b+1} = \frac{n}{b+1}}$

5. Quand $X = k$, il reste $n-k$ boules noires et $b-1$ boules blanches pour les tirage du joueur B
Tant qu'il n'a pas eu de boule blanche, la probabilité de tirage de blanche est de $\dfrac{b-1}{n-k+b-1}$
Le nombre de tirages de B pour obtenir la première blanche $Y+1$ est donc sans mémoire.
et $Y+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{b-1}{n-k+b-1}\right)$ soit $\mathrm{P}_{X=k}(Y=i) = \left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i}\dfrac{b-1}{n-k+b-1}$ et cela même pour $i = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{P}\left(X=k\cap Y=i\right)=\dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}\left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i}\dfrac{b-1}{n-k+b-1}\text{ pour } i\geq 0 \text{ et } k\in[[0,n-1]] \\ \mathrm{P}\left(X=n\cap Y=0\right)=\dfrac{1}{\binom{n+b}{b}}\text{ et } \mathrm{P}\left(X=n\cap Y=i\right)=0 \text{ si } i\geq 1 \end{array}}$$

6. $0\leq q=\dfrac{n-k}{n-k+b-1}<1$ donc la série $\sum_{i\geq 1} iq^{i-1}$ converge et

$$\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1}=\frac{1}{\left(1-q\right)^{2}}=\left(\frac{n-k+b-1}{b-1}\right)^{2}$$

7. **Question digne de ESSEC II :**
Par la formule des probabilités totales avec $(X=k)_{k\in[[0,n]]}$ comme système complet d'événements,

$$\mathrm{P}\left(Y=i\right)=\mathrm{P}\left(X=n\cap Y=i\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}\left(X=k\cap Y=i\right)$$

que l'on ne cherche pas à expliciter... pour pouvoir recycler les questions précédentes.
donc, et (convergence absolue partout)

$$\begin{aligned} E\left(Y\right) &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\left[\mathrm{P}\left(X=n\cap Y=i\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}\left(X=k\cap Y=i\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\,\mathrm{P}\left(X=n\cap Y=i\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{+\infty} i\,\mathrm{P}\left(X=k\cap Y=i\right) \\ &= 0+\sum_{i=1}^{+\infty}0+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{P}\left(X=k\right)\sum_{i=0}^{+\infty} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}\overbrace{\frac{n-k}{n-k+b-1}\frac{b-1}{n-k+b-1}}^{\text{constante / } i}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}\left(X=k\right)\frac{\left(n-k\right)\left(b-1\right)}{\left(n-k+b-1\right)^{2}}\left(\frac{n-k+b-1}{b-1}\right)^{2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}\left(X=k\right)\frac{n-k}{b-1} \\ &= \frac{1}{b-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}\left(X=k\right)\left(n-k\right) \\ &= \frac{1}{b-1}E\left(n-X\right)\quad\text{(transfert !)} \\ &= \frac{1}{b-1}\frac{bn}{b+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } E\left(Y\right)=\frac{bn}{b^{2}-1}}$$

Catégorie : Variables discrète, interprétation
Niveau : 2
Conclusion : Exercice complet et progressif, calculs finaux costauds !