Exercice 1

Partie I. Réduction de l'endomorphisme f

1. - $(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ x+2y+z=0\\ 2x-2y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ z=-2y\end{cases}$
   Ainsi, $\ker(f)=\{(0,y,-2y), y\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}(0,1,-2)=\text{Vect}(u)$. u est un élément non nul de $\mathbb{R}^3$ donc (u) est une base de $\ker(f)$.
   - $\text{Im}(f)$=Vect$\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}$=Vect$\{(1,1,2),(0,2,-2),(0,1,-1)\}$
   Ainsi, $\text{Im}(f)$=Vect$\{(1,1,2),(0,1,-1)\}$. La famille $\{(1,1,2),(0,1,-1)\}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ qui comporte deux éléments non colinéaires donc elle est également libre et c'est une base de $\text{Im}(f)$.
   Remarque : on pouvait aussi utiliser le théorème du rang qui donnait dim(Im(f))=2 donc la famille $\{(1,1,2),(0,1,-1)\}$ est une famille génératrice comportant deux éléments de $\text{Im}(f)$ qui est de dimension 2 donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

2. $\ker(f)\neq\{0\}$ donc f n'est pas bijectif. Ainsi, 0 est une valeur propre de f.

3. - $u\neq 0$ et $f(u)=0$ donc u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.
   - $v\neq 0$ et $f(v)=v$ donc v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.
   - E_0 =ker(f) donc dim(E_0)=1.
   - Cherchons E_1.
   Soit $X=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$. $AX=X \Leftrightarrow \begin{cases} x=x\\ x+2y+z=y\\ 2x-2y-z=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0\\ 2x-2y-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=-z\end{cases}$
   Ainsi, E_1 =Vect(v) et dim(E_1)=1.

4. Il faut déterminer si A admet d'autres valeurs propres que 0 et 1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\neq 0, \lambda\neq 1$. λ est valeur propre de A ssi le système $AX=\lambda X$ admet des solutions non nulles.
   Posons $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$
   $$\begin{aligned} AX=\lambda X \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x=0\\ x+(2-\lambda)y+z=0\\ x-2y-(1+\lambda)z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ car } \lambda\neq 1\\ (2-\lambda)y+z=0\\ -2y-(1+\lambda)z=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ (2-\lambda)y+z=0\\ ((1+\lambda)(2-\lambda)-2)y=0 L_3\leftarrow L_3+(1+\lambda)L_2\end{cases} \qquad \text{car } \lambda\neq 0 \text{ et } \lambda\neq 1.\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ (2-\lambda)y+z=0\\ (\lambda-\lambda^2)y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ z=0\\ y=0\end{cases}\end{aligned}$$
   Ainsi 0 et 1 sont les seules valeurs propres de A.
   Or dim(E_1)+dim(E_0)=2 et la matrice A est d'ordre 3 donc A n'est pas diagonalisable....

5. Soit $t=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$f(t)=v+t \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ x+2y+z=y+1 \\ 2x-2y-z=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y-2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 4y+4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\frac{3}{4}-z \end{cases}$

Ainsi, l'ensemble des t solutions est l'ensemble $\{(\frac{1}{4},\frac{3}{4}-z,z), z\in\mathbb{R}\}$.

6. - D'après la matrice que l'on souhaite obtenir, w doit vérifier la relation : $f(w)=w+v$ donc w appartient à l'ensemble précédent et sa troisième coordonnée est 0. On a ainsi, $\boxed{w=(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0)}$.
   - Montrons que $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{C}$ est une famille de 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ donc il suffit de démontrer qu'elle est libre pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$.
     Soient a,b,c trois réels tels que $au+bv+cw=0$.
     On obtient alors : $\begin{cases} \dfrac{1}{4}c=0 \\ a+b+\dfrac{3}{4}c=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a+b=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0.$
     Ainsi la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - $f(u)=0, f(v)=v, f(w)=v+w$ donc la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est $T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Partie II. Résolution d'une équation

1. - $f\circ g=g\circ g\circ g=g\circ f$.
   - On a alors : $f(g(u))=g(f(u))=g(0)$ car $f(u)=0$. Or g est linéaire donc $g(0)=0$. Ainsi, $f(g(u))=0$.
   - $f(g(v))=g(f(v))=g(v)$ car $f(v)=v$.
2. - $f(g(u))=0$ donc $g(u)\in\ker(f)$. Or $\ker(f)$=Vect(u). Ainsi il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $g(u)=au$.
   - $f(g(v))=g(v)$ donc $g(v)\in E_1$. Or E_1=Vect(v). Ainsi il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $g(v)=bv$.
3. $g(u)=au, g(v)=bv$ et puisque (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ il existe trois réels c,d,e tels que $g(w)=cu+dv+ew$. La matrice de g dans la base $\mathcal{C}$ est alors :
   $N=\begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&d\\0&0&e\end{pmatrix}$
4. $g\circ g=f \Leftrightarrow N^2=T \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a^2&0&ac+cd\\0&b^2&be+ed\\0&0&d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b^2=1 \\ e^2=1 \\ ac+ce=0 \\ be+ed=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b^2=1 \\ e^2=1 \\ c=0 \\ be+ed=1 \end{cases}.$
   Ainsi, on obtient les solutions suivantes :
   $\begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=1 \\ e=1 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=-1 \\ e=-1 \\ d=-\frac{1}{2} \end{cases}$
   Autrement dit les endomorphismes dont les matrices dans la base $\mathcal{C}$ sont : $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&-1\end{pmatrix}$
   sont solutions au problème posé.

Exercice 2

1. • Soit $x \in [0, +\infty[$.
   Si $x > 0$, alors $1 + x > 1$ donc $\ln(1 + x) > 0$ et, par quotient, $f(x) > 0$.
   D'autre part, $f(0) = 1 > 0$.
   Donc : $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \ f(x) > 0}$

   • Démontrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
   <u>Initialisation</u> : on a $u_0 = e > 0$ donc la propriété est vraie au premier rang.
   <u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel tel que u_n existe et $u_n > 0$.
   $u_n \in [0, +\infty[$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe et, d'après l'étude du signe de $f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$ ci-dessus, on a $u_{n+1} > 0$.
   <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \text{ existe (et } u_n > 0)}$

2. Remarquons que nous avons démontré à la question précédente la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, ce qui permet d'affirmer que seule l'expression de f sur $]0, +\infty[$ est utilisée pour calculer les termes successifs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

   ```
   program exercice2;
   var N,k : integer; u :real;
   begin
   read(N); u :=e;
   for k :=1 to N do u :=u/ln(1+u);
   write(u);
   end.
   ```

3. • f est continue sur $]0, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions usuelles continues (avec, pour $x > 0$, $1 + x > 0$ et $\ln(1 + x) \neq 0$)
   • Au voisinage de 0 on a $\ln(1+x) \sim x$, donc $f(x)$ tend vers $1 = f(0)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives, donc f est continue en 0.
   Avec les deux points précédents on conclut que : $\boxed{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$

4. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$.

5. <u>Développement limité de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 2 en 0</u> :
   $\forall x > -1$, $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)$ où $\epsilon_1(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

   <u>Développement limité de $\dfrac{x}{1+x}$ à l'ordre 2 en 0</u> :
   (Remarque : on utilise le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 1 en 0, la multiplication par x augmentera l'ordre d'une unité.)
   $\forall x \neq -1$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x\epsilon_2(x)$ où $\epsilon_2(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
   donc $\dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + x^2\epsilon_2(x)$ où $\epsilon_2(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

   On obtient alors : $$\boxed{\begin{array}{c}\forall x > -1, \ \ln(1 + x) - \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x) \\ \text{où } \epsilon_3(x) = \epsilon_1(x) - \epsilon_2(x) \text{ tend vers 0 quand } x \text{ tend vers 0.}\end{array}}$$

   Avant de chercher un équivalent de $f'(x)$ au voisinage de 0, calculons $f'(x)$ pour $x > 0$ (rappelons que f est dérivable sur $]0, +\infty[$) :

$\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}$

En utilisant le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 du numérateur obtenu plus haut, et le développement limité à l'ordre 1 de $ln(1+x)$ en 0 pour le dénominateur, on obtient :

$\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{\dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x)}{(x + x\epsilon_4(x))^2}$ où $\epsilon_3(x)$ et $\epsilon_4(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers 0.

donc : $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x)}{x^2(1 + \epsilon_4(x))^2}$

et en simplifiant par x^2 : $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \epsilon_3(x)}{(1 + \epsilon_4(x))^2}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1/2 \neq 0$, c'est-à-dire :

$\boxed{f'(x) \sim 1/2 \text{ au voisinage de } 0.}$

6. f est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $f'(x)$ tend vers $1/2$ quand x tend vers 0^+
   Donc : $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[}$

7. Soit $x \geq e - 1$.
   On a $1 + x \geq e$ donc $\ln(1+x) \geq 1$ (car la fonction ln est croissante)
   donc $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \leq 1$ (car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   donc, en multipliant par x qui est positif, on obtient $f(x) \leq x$.
   D'autre part, avec $\ln(1+x) \geq 1$, en mulitipliant par $1 + x$ qui est positif, on obtient :
   $(1 + x)\ln(1 + x) \geq 1 + x$.
   Donc : $\boxed{\forall x \geq e-1,\ f(x) \leq x \text{ et } (1+x)\ln(1+x) \geq 1+x.}$

   On a : $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{(1+x)ln(1+x) - x}{(1+x)(ln(1+x))^2}$,
   Le dénominateur est clairement positif, par ailleurs, avec $\forall x \geq e - 1,\ (1 + x)ln(1 + x) \geq 1 + x$, on obtient :
   $\forall x \geq e - 1,\ (1 + x)ln(1 + x) - x \geq 1$
   Donc, par quotient, $\boxed{\forall x \geq e-1,\ f'(x) \geq 0.}$

8. Démontrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e - 1 \leq u_n$.
   <u>Initialisation</u> : on a $u_0 = e \geq e - 1$ donc la propriété est vraie au premier rang.
   <u>Hérédité</u> : soit n un entier naturel tel que $e - 1 \leq u_n$.
   on a $e - 1 \leq u_n$ et d'après la question 7. f est croissante sur $[e - 1; +\infty[$
   donc $f(e - 1) \leq f(u_n)$
   or, $f(e - 1) = e - 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$
   donc $e - 1 \leq u_{n+1}$ et la propriété est héréditaire.
   <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ e-1 \leq u_n}$

9. (Remarque : l'idée est d'utiliser le théorème de convergence monotone (la suite u est minorée), il nous manque pour cela la monotonie de la suite u... il est très classique d'utiliser l'inégalité $f(x) \leq x$ pour cela).
   <u>Monotonie de la suite u</u> : soit $n \in \mathbb{N}$,
   On a $u_n \geq e - 1$ et $\forall x \geq e - 1,\ f(x) \leq x$ donc, $f(u_n) \leq u_n$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$.
   Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$
   C'est-à-dire : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

Convergence de la suite u :
La suite u est décroissante et minorée (par $e-1$) donc elle converge vers une limite L.
Valeur de la limite de la suite u :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L \geq e-1$ et f est continue sur $[0,+\infty[$ donc en L, donc $L = f(L)$.
Résolvons l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \geq e-1$:
$f(x) = x$
$\Leftrightarrow \dfrac{x}{\ln(1+x)} = x$ (car $x > 0$)
$\Leftrightarrow \ln(1+x) = 1$
$\Leftrightarrow 1 + x = e$
$\Leftrightarrow x = e-1$
Donc : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } e-1}$

Exercice 3

PARTIE I : Etude d'une première expérience

1. a)
```
function lancer(p :real) :integer;
begin
if random < p then lancer :=1 else lancer :=0;
end;
```
   b)
```
function premierpile(p :real) :integer;
var aux :real;
begin
aux :=0;
repeat aux :=aux+1 until lancer(p)=1;
premierpile :=aux;
end;
```

   Remarques :
   - la variable qui correspond au nom de la fonction ne peut pas être utilisée dans les calculs pendant l'éxécution, c'est pourquoi nous avons introduit "aux", variable auxiliaire qui permet d'effectuer les calculs.
   - on pouvait aussi utiliser une boucle "while...do..." attention, dans ce cas "aux" doit être initialisée à la valeur 1 pour prendre en compte le premier lancer quelque soit le résultat.

   c)
```
program exercice3;
var y :integer; p :real;

function lancer(p :real) :integer;
begin
if random < p then lancer :=1 else lancer :=0;
end;

function premierpile(p :real) :integer;
var aux :real;
begin
aux :=0;
repeat aux :=aux+1 until lancer(p)=1;
```

```
premierpile :=aux;
end;

begin
randomize; read(p);
y :=premierpile(p)+premierpile(p)-1;
write(y);
end.
```

Remarques :
- attention, premierpile(p)+premierpile(p) n'est pas du tout la même chose que 2*premierpile(p) ici... quand on appelle deux fois la fonction, on fait deux séries de lancers, ce qui n'est pas le cas quand on l'appelle une seule fois.
- sur une copie de concours ne ré-écrivez pas les fonctions, signalez seulement leur place dans le programme.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   X_n est le nombre de "pile" obtenus au cours de n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p, donc $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$
   On a donc : $\boxed{E(X_n) = np \text{ et } V(X_n) = np(1-p)}$

3. Y est le nombre de "face" obtenues avant d'avoir le deuxième "pile", Y est donc à valeurs entières positives et :
   - au minimum Y vaut 0 (quand on a pile aux deux premiers lancers)
   - il est possible de ne jamais obtenir de deuxième "pile"
   Donc $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$

4. Complétons les notations introduites dans l'énoncé en introduisant : P_i : "$onobtientpileaui^{e}lancer$".
   $(Y = 0) = P_1 \cap P_2$, intersection d'événements indépendants donc :
   $\boxed{P(Y = 0) = P(P_1)P(P_2) = p^2}$

   $(Y = 1) = F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3$, réunion de deux événements incompatibles, intersections d'événements indépendants, donc :
   $\boxed{P(Y = 1) = P(F_1)P(P_2)P(P_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3) = 2p^2q}$

   $(Y = 2) = F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4 \cup F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cup P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4$, réunion d'événements deux à deux incompatibles, intersections d'événements indépendants, donc :
   $\boxed{P(Y = 2) = 3p^2q^2}$

5. Soit n un entier naturel.
   $(Y = n)$ est réalisé si et seulement si on obtient exactement n fois "face" avant le deuxième "pile". Pour réaliser cet événement, il est nécessaire et suffisant d'avoir fait $n+2$ lancers, le dernier donnant "pile" et les $n+1$ premiers ne contenant que des faces, sauf l'un d'entre eux (le premier "pile").
   $(X_{n+1} = 1) \cap \bar{F}_{n+2}$ est réalisé si et seulement si les $n+1$ premiers lancers donnent une fois "pile" et n fois "face" et le $n+2$ ième lancer donne "pile", d'où l'égalité demandée.

6. Soit n un entier naturel.
   $P(Y = n) = P(X_{n+1} = 1 \cap P_{n+2})$, intersection d'événements indépendants (ils ne décrivent pas les mêmes lancers).
   Donc $\boxed{P(Y = n) = P(X_{n+1} = 1)P(P_{n+2}) = \binom{n+1}{1} pq^n p = (n+1)p^2q^n}$.
   (Remarquons que ce résultat est cohérent avec ce que l'on a obtenu à la question 4.).

7. $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)p^2q^n = p^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n = p^2\sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j-1} = p^2\frac{1}{(1-q)^2} = 1$

8. Y possède une espérance ssi $\sum nP(Y=n)$ converge.
   Or, sous réserve de convergence,
   $\sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) = p^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)q^n = p^2\sum_{j=1}^{+\infty} j(j-1)q^{j-1}$ et cette somme converge en tant que dérie dérivée de série géométrique.
   Ainsi Y admet une espérance et
   $E(Y) = p^2q\sum_{j=1}^{+\infty} j(j-1)q^{j-2} = p^2q\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p}$

9. $Y_k(\Omega) = [\![0;+\infty[\![$. $(Y_k = n)$ signifie que l'on a obtenu n faces avant le k-ième pile. Autrement dit lors des $n+k-1$ premiers lancers on a obtenu $k-1$ pile et au $n+k$-ième lancer on obtient pile.
   Ainsi, $P(Y_k = n) = P(X_{n+k} = k-1 \cap \overline{F_{k+n}}) = P(X_{n+k-1} = k-1)P(\overline{F_{k+n}}) = \binom{n+k-1}{k-1}p^{k-1}q^n$

PARTIE II : Etude d'une seconde expérience

1.
   - R suit la loi uniforme sur $[0;1]$ donc $F_R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ t & \text{si} \quad t\in[0;1] \\ 1 & \text{si} \quad t>1 \end{cases}$
   - Soit $t\in\mathbb{R}$. $F_S(t) = P(S\leqslant t) = P(1-R\leqslant t) = P(R\geqslant 1-t) = 1-F_R(1-t)$.
     - Premier cas : Si $1-t<0$ soit $t>1$ alors $F_S(t) = 1-0 = 1$
     - Deuxième cas : Si $0\leqslant 1-t\leqslant 0$ soit $0\leqslant t\leqslant 1$ alors $F_S(t) = 1-(1-t) = t$
     - Troisième cas : Si $1-t>1$ soit $t<0$ alors $F_S(t) = 1-1 = 0$

   Ainsi, $S \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.

2. Soit $t\in\mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} P(T\leqslant t) &= P(\max(R,S)\leqslant t) = P((R\leqslant t)\cap(S\leqslant t)) = P((R\leqslant t)\cap(1-R\leqslant t)) \\ &= P((R\leqslant t)\cap(R\geqslant 1-t)) \end{aligned}$$

3. Si $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, on a alors $1-t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ donc $P(T\leqslant t) = F_R(t)-F_R(1-t) = t-(1-t) = 2t-1$.

4.
   - Si $t<\frac{1}{2}$, $1-t>\frac{1}{2}$ donc $P(T\leqslant t) = P(1-t\leqslant R\leqslant t) = 0$
   - Si $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, alors $F_R(t) = 2t-1 = \frac{t-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$
   - Si $t>1$, alors $1-t<0$ et $P(T\leqslant t) = F_R(t)-F_R(1-t) = 1$

   Conclusion : $T \hookrightarrow \mathcal{U}\left([0;\frac{1}{2}]\right)$.

5. Ainsi, $E(T) = \frac{3}{4}$ et $V(T) = \frac{1}{48}$.