Correction ecricome 2015

Exercice 1

I. Une loi exponentielle et une suite

1. **Une loi exponentielle**

   (a) Une densité de X est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

   $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$.

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

   – Premier cas : si $x < 0$, $F(x) = 0$.
   – Deuxième cas : si $x \geqslant 0$,
   $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$.

   Bilan : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

2. **Etude d'une suite**

   (a) Première méthode :
   La fonction exponentielle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement convexe ; $y = x + 1$ est l'équation de sa tangente au point d'abcisse 0. Ainsi, la courbe représentative de la fonction exponentielle est située au-dessus de la droite d'équation $y = x + 1$ avec en seul point commun le point d'abcisse 0. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$ avec égalité ssi $x = 0$.
   Deuxième méthode :
   Posons $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = e^x - (x + 1)$. $h'(x) = e^x - 1$ donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $h'(x)$	-	0	+
variations de h	$\searrow$	0	$\nearrow$

   Ainsi, $h(x) \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = 0$.

   (b) Raisonnons par récurrence :
   – Initialisation : $u_1 = 1 > 0$ donc la propriété est vérifiée au rang 1.
   – Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n > 0$. On a alors :
   $-u_n < 0 \Rightarrow e^{-u_n} < 1 \Rightarrow 1 - e^{-u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.

   Bilan : Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

   (c)
   ```
   U=zeros(1,100)
   U(1)=1
   for n=1:99
    U(n+1)=1-exp(U(n))
   end
   plot(U,"+")
   ```

   (d) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0.

   (e) Soit $n \geqslant 1$. $u_{n+1} - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n$.
   Or d'après la question a), $e^{-u_n} \geqslant -u_n + 1 \Rightarrow 1 - e^{-u_n} - u_n < 0$ autrement dit $u_{n+1} - u_n < 0$.
   Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

   (f) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$, F étant continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction de répartition d'une variable à densité), ℓ vérifie :
   $\ell = F(\ell) \Leftrightarrow \ell = 1 - e^{-\ell} \Leftrightarrow h(-\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ toujours d'après la question a).

   Bilan : (u_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

(g) Soit n un entier naturel non nul.
$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \dfrac{1}{e^{u_n}}$.
Or d'après la question 2)a), $e^{u_n} \geqslant u_n + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{e^{u_n}} \leqslant \dfrac{1}{u_n+1}$.
Puis, $1 - \dfrac{1}{e^{u_n}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{u_n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.
Ainsi, $\boxed{u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n}{u_n+1}}$.
Puis, $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n+1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

(h) Raisonnons par récurrence :
– Initialisation : $u_1 = 1 \geqslant 1$
– Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$. On a alors $\dfrac{1}{u_n} \leqslant n$. Ainsi, puisque $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{u_n}$, on a :
$\dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + n$ puis $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$

<u>Bilan :</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

(i) `S=cumsum(U)` donc les coordonnées de S sont $(u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \ldots, \sum_{k=1}^{100} u_k)$ autrement dit les sommes partielles de la série de terme général u_n.
Ainsi on peut conjecturer que la suite des commes partielles tend vers $+\infty$ autrement dit que la série de terme général u_n diverge.

(j)
- $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
- $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$
- $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 1$ (série harmonique).

Ainsi, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

II. Une fonction et une variable à densité

1. **Etude de la fonction g**

(a) – g est dérivable sur $]-\infty;0[$ en tant que fonction constante.
– g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables.
• Etude de la continuité de g en 0 :
$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0.
• Etude de la dérivabilité de g en 0 :
Si $x \geqslant 0$: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = e^{-x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1$.
Si $x < 0$: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ donc g n'est pas dérivable en 0.

(b) $\forall x \geqslant 0, g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. Ainsi,

x	0		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$		+	0	-	
variations de g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ car $x = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$.

(c) g est de classe C^2 sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \geqslant 0, g''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$. Ainsi,

x	0		2		$+\infty$
signe de $g''(x)$		+	0	-	

Ainsi, g est convexe sur $[0;2]$ et concave sur $[2;+\infty[$.

2. **Etude de variables aléatoires**
   (a) • g est continue sur $\mathbb{R}$.
   • $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geqslant 0$.
   • $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = E(X) = 1$ où X désigne la variable aléatoire de la partie I qui suit une loi exponentielle de paramètre 1 ! !

   Bilan : g est une densité de probabilité.

   (b) G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car g est continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$.
   – Premier cas : si $x < 0$, $G(x) = 0$
   – Deuxième cas : si $x \geqslant 0$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \int_0^x te^{-t}dt$. Posons :

   $\begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} & v'(t) = e^{-t} \end{array}$ u et v sont de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ donc à l'aide d'une intégration par parties,

   $G(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x (-e^{-t})dt = -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-}x + 1 = 1 - e^{-x}(x+1)$.

   Bilan : $\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < 0 \\ 1 - e^{-x}(x+1) & \text{si } \; x \geqslant 0 \end{cases}}$

   (d) Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ converge absolument. Or

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|dt = \int_0^{+\infty} tg(t)dt$. Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2e^tdt = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 2$.

   Ainsi, Y admet une espérance et $E(Y) = 2$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $H(x) = \mathrm{P}(Z \leqslant x)$.
   – Premier cas : si $x < 0$.
   Alors $H(x) = 0$
   – Deuxième cas : si $x \geqslant 0$
   Alors $H(x) = \mathrm{P}(Y \leqslant \ln(x)) = G(\ln(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; \ln(x) \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\ln(x)}(1 + \ln(x)) & \text{si } \; \ln(x) \geqslant 0 \end{cases}$

   Ainsi, $\boxed{H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}(1 + \ln(x)) & \text{si } \; x \geqslant 1 \end{cases}}$

   (b) • H est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} H(x) = \lim_{x \to 1^-} H(x) = H(1) = 0$. Ainsi, H est continue sur $\mathbb{R}$.
   • H est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

   Ainsi, Z est une variable à densité dont une densité est $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } \; x \geqslant 1 \end{cases}$

   (c) Z admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)dt$ converge absolument autrement dit ssi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}dt$ converge.

   Soit $A \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{2}\left(\ln(t)\right)^2\right]_1^A = \frac{1}{2}(\ln(A))^2$.

   Et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} (\ln(A))^2 = +\infty$ donc Z n'admet pas d'espérance.

<u>Exercice 2</u>

I. Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. – Il est clair que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\varphi_A(M) = AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   – Démontrons que φ_A est linéaire. Soient M et N deux élements de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel,
   $\varphi_A(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = \varphi_A(M) + \lambda\varphi_A(N)$.

   Ainsi, φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Supposons que φ_A est bijectif.
$AN = I_2 \Leftrightarrow \varphi_A(N) = I_2$. Or φ_A étant bijectif il existe une unique matrice N solution de cette équation. Ainsi, il existe une unique matrice N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors d'après la question précédente, il existe une unique matrice N tel que $AN = I_2$. Autrement dit A est inversible.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que A est inversible.
$M \in \text{Ker}(\varphi_A) \Leftrightarrow \varphi_A(M) = 0 \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow A^{-1}AM = 0 \Leftrightarrow M = 0$
Ainsi, $\text{Ker}(\varphi_A) = \{0\}$ et puisque φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, φ_A est bijectif et c'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
<u>Bilan :</u> φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi A est inversible.

II. Un exemple

1. A est une matrice triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux 1 et -1. Ainsi, A est une matrice d'ordre 2 qui admet deux valeurs propres, donc elle est diagonalisable.

2. – $\varphi_A\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = E_{11}$
   – $\varphi_A\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = E_{12}$
   – $\varphi_A\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix} = -2E_{11} - E_{21}$
   – $\varphi_A\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix} = 2E_{12} - E_{22}$

   Ainsi, la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{B}$ est : $T = \begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

3. T est une matrice trangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux soient 1 et -1.
   – Recherche de E_{-1} : Soit $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.
   $X \in E_{-1} \Leftrightarrow TX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = -a \\ b+2d = -b \\ -c = -c \\ -d = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = b \end{cases}$ Ainsi, $X = \begin{pmatrix}a\\b\\a\\b\end{pmatrix}$. Ainsi, le sous -espace propre associé à la valeur propre 1 de T est $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et le sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 1 est $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.
   – Recherche de E_1 : Soit $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.
   $X \in E_1 \Leftrightarrow TX = X \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = b \\ -c = c \\ -d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ Ainsi, $X = \begin{pmatrix}a\\b\\0\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, le sous -espace propre associé à la valeur propre 1 de T est $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ et le sous-espace propre de φ_A associé à la

valeur propre 1 est Vect$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

4. Les deux sous-espaces E_1 et E_{-1} sont chacun clairement de dimension 2. Donc dim(E_1)+dim(E_{-1})=4=dim($\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) ainsi φ_A est diagonalisable.

III. D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Soit λ un réel tel que il existe une matrice M non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$. Supposons que $A - \lambda I_2$ est inversible.
   On a $AM = \lambda M \Rightarrow AM - \lambda M = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_2)M = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_2)^{-1}(A - \lambda I_2)M = 0 \Rightarrow M = 0$ absurde ! !
   Ainsi $A - \lambda I_2$ est non inversible.
2. $AX = \mu X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}ax + by\\ cx + dy\end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ autrement dit $\begin{cases} ax + by = \mu x \\ cx + dy = \mu y \end{cases}$
   $\varphi_A(N) = A\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax + by & 0\\ cx + dy & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu x & 0\\ \mu y & 0\end{pmatrix} = \mu N$; ainsi N est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.
   $\varphi_A(N') = A\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & ax + by\\ 0 & cx + dy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \mu x\\ 0 & \mu y\end{pmatrix} = \mu N'$; ainsi N' est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

3. D'après la question 1, si λ est valeur propre de φ_A alors λ est valeur propre de A, ainsi Spec(φ_A) $\subset$ Spec(A).
   Puis d'après la question 2., si μ est une valeur propre de A alors μ est aussi une valeur propre de φ_A. Ainsi, Spec(A)$\subset$ Spec(φ_A).
   <u>Bilan :</u> $\boxed{\text{Spec}(\varphi_A)=\text{Spec}(A)}$
4. Supposons que A est diagonalisable, alors la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 2. Or d'après la question 2, à chaque vecteur propre de A correspond au moins deux vecteurs propres distincts de φ_A. Ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres de φ_A et supérieure ou égale à 4, donc est égale à 4 et φ_A est diagonalisable.

<u>Exercice 3</u>

I. Une première expérience aléatoire

1. Dans ce programme la variable M désigne le nombre de boules contenues dans l'urne (qui diminue qu fil de l'expérience...) donc à chaque tirage la propbabilité de tirer la boule noire est $\dfrac{1}{M}$

```
N=input('Donner un entier naturel non nul')
S=zeros(1,N) for k=1:10000
    i=1
    M=N
    while rand()>1/M
        i=i+1
        M=M-1
    end
    S(i)=S(i)+1
end
disp(S/10000)
bar(S/10000)
```

2. On sait tout d'abord que $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et l'histogramme donné laisse penser que X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, 5\}$.
3. – $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(N_1) = \dfrac{1}{N}$

– $\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(B_1\cap N_2)=\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}_{B_1}(N_2)=\dfrac{N-1}{N}\dfrac{1}{N-1}=\dfrac{1}{N}$

– $\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(B_1\cap B_2\cap N_3)=\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}_{B_1}(B_2)\mathrm{P}_{B_1\cap B_2}(N_3)=\dfrac{N-1}{N}\dfrac{N-2}{N-1}\dfrac{1}{N-2}=\dfrac{1}{N}$.

4. $X(\Omega)=\{1,\dots,N\}$.
Soit $k\in\{1,\dots,N\}, \mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(B_1\cap\dots\cap B_{k-1}\cap N_k)=\dfrac{N-1}{N}\dfrac{N-2}{N-1}\cdots\dfrac{1}{N-(k-1)}=\dfrac{1}{N}$ (d'après la formule des probabilités composées).
Ainsi, $\forall k\in\{1,\dots,N\}, \mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{N}$ donc X suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,N\}$.

5. $E(X)=\dfrac{N+1}{2}$ donc le nombre moyen de tirage nécessaires à l'obtention d'une boule noire est $\dfrac{N+1}{2}$.

II. Une deuxième expérience aléatoire

1. Si l'événement C_1 est réalisé, on effectue les tirages dans l'urne U_1 qui contient une boule noire. Donc nous sommes ramenés à l'expérience de la partie précédente : $\mathrm{P}_{C_1}(Y=j)=\mathrm{P}(X=j)=\dfrac{1}{N}$
2. Lorsqu'on effectue des tirages dans l'urne U_2 qui ne contient que des boules blanches, on est sûr d'être dans l'urne U_2 que lorsque toutes les boules ont été tirées. Ainsi,
$\mathrm{P}_{C_2}(Y=j)=0$ si $1\leqslant j\leqslant N-1$ et $\mathrm{P}_{C_2}(Y=N)=1$
3. (C_2,C_1) forme un système complet d'événements donc à l'aide de la formule des probabilités totales,
$\mathrm{P}(Y=j)=\mathrm{P}_{C_1}(Y=j)\mathrm{P}(C_1)+\mathrm{P}_{C_2}(Y=j)\mathrm{P}(C_2)$.
– Si $1\leqslant j\leqslant N$, $\mathrm{P}(Y=j)=\mathrm{P}_{C_1}(Y=j)\mathrm{P}(C_1)+0=\dfrac{1}{N}\dfrac{1}{2}$
– Si $j=N$, $\mathrm{P}(Y=j)=\dfrac{1}{N}\dfrac{1}{2}+1.\dfrac{1}{2}$
<u>Bilan :</u> $\mathrm{P}(Y=j)=\begin{cases}\dfrac{1}{2N} & \text{si} \quad j\in[\![1,N-1]\!]\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2N} & \text{si} \quad j=N\end{cases}$
4. On a :
$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} j\mathrm{P}(Y=j)=\sum_{j=1}^{N-1} j\mathrm{P}(Y=j)+N\mathrm{P}(Y=N)\\ &= \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}=\frac{(N-1)N}{2}\frac{1}{2N}+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{N-1}{4}+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3N+1}{4}\end{aligned}$$
<u>Bilan :</u> $\boxed{E(N)=\dfrac{3N+1}{4}}$

III. Une troisième expérience aléatoire

1. $T(\Omega)=[\![2;+\infty[\![$ car il faut au moins deux tirages pour avoir obtenu au moins une boule blanche et une boule noire.
2. Soit $k\geqslant 2$.
$\mathrm{P}(T=k)=\mathrm{P}(B_1\cap B_2\cap\dots\cap B_{k-1}\cap N_k)+\mathrm{P}(N_1\cap N_2\cap\dots\cap N_{k-1}\cap B_k)$. Or les tirages s'effectuent ici avec remise donc les événements B_i et N_j sont indépendants ; ainsi :
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=k) &= \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(B_2)\dots\mathrm{P}(B_{k-1})\mathrm{P}(B_k)+\mathrm{P}(N_1)\mathrm{P}(N_2)\dots\mathrm{P}(N_{k-1})\mathrm{P}(B_k)\\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}+\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}\end{aligned}.$$
3. T admet une espérance ssi $\sum k\mathrm{P}(T=k)$ converge absolument autrement dit ssi $\sum k\mathrm{P}(T=k)$ converge car T est à valeurs positives.
Sous réserve de convergence,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k\mathrm{P}(T=k) = \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

On reconnaît ici des séries dérivées de séries géométriques qui convergent car $\left|\frac{1}{N}\right| < 1$ et $\left|\frac{N-1}{N}\right| < 1$.

Ainsi, T admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{N}\left((\frac{1}{1-\frac{N-1}{N}})^2 - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left((\frac{1}{1-\frac{1}{N}})^2 - 1\right) \\ &= \frac{1}{N}(N^2-1) + \frac{N-1}{N}\left((\frac{N}{N-1})^2 - 1\right) \\ &= N + \frac{N}{N-1} - \frac{1}{N} - \frac{N-1}{N} = N + \frac{N}{N-1} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E(T) = N + \frac{1}{N-1}}$

4. (a) $\mathrm{P}(U=1\cap T=2) = \mathrm{P}(B_1\cap N_2) + \mathrm{P}(N_1\cap B_2) = \frac{N-1}{N}\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\frac{N-1}{N} = \frac{2(N-1)}{N^2}$.

   (b) Soit $k \geqslant 3$.
   $\mathrm{P}(U=1\cap T=k) = \mathrm{P}(N_1\cap ...\cap N_{k-1}\cap B_k) = \frac{1}{N^{k-1}}\frac{N-1}{N}$ (intersection d'événements indépendants)

5. (a) $\mathrm{P}\left([U=j]\cap[T=j+1]\right) = \mathrm{P}(B_1\cap\ldots\cap B_j\cap N_{j+1}) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}$

   (b) $\mathrm{P}([U=j]\cap[T=k]) = 0$ si $k\neq j+1$ car $U=j$ signifie que l'on a obtenu j boules blanches avant d'obtenir au moins une boule de chaque couleur donc nécessairement la $j+1$ ième est noire donc $T=j+1$.

6. $\mathrm{P}(U=1) = \mathrm{P}(U=1\cap T=2) = \frac{2(N-1)}{N^2}$ donc $\mathrm{P}(U=1)\mathrm{P}(T=2)\neq\mathrm{P}(U=1\cap T=2)$. Ainsi, U et T ne sont pas indépendantes.

7. $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Avec la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $\{(T=k), k\in[\![2;+\infty[\![\}$ on a :
   $\mathrm{P}(U=1) = \sum_{k=2}^{+\infty}\mathrm{P}(U=1\cap T=k) = \frac{2(N-1)}{N^2} + \sum_{k=3}^{+\infty}\frac{N-1}{N^k}$
   Donc $\mathrm{P}(U=1) = \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{N-1}{N^3}\frac{1}{1-1/N} = \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{1}{N^2} = \frac{2N-1}{N^2}$
   et $\forall j\geqslant 2$
   $\mathrm{P}(U=j) = \mathrm{P}(U=j\cap T=j+1) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}$.