Corrigé DS 7 : EDHEC 2000 par Pierre Veuillez

Exercice 1

1. $e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x\left(e^{2x}-1\right) > 0$ et comme $x \to e^{2x}-1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle en0 : $e^x - e^{-x} > 0 \iff x > 0$

   Donc $D = \mathbb{R}_+^*$

   On définit la fonction f par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right)$.

   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. **a)** f est dérivable sur
$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} > 0 \text{ sur } D} > 0$$
   En 0 : $\ln\left(e^x - e^{-x}\right) \to -\infty$ et en $+\infty$: $\ln\left(e^x - e^{-x}\right) \to +\infty$
   Avec f strictement croissante sur D

   b) Comme f est continue et strictement croisante sur l'ntervalle $D =]0, +\infty[$ elle est bijective de D dans $]\lim_0 f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$.
   Et comme $0 \in \mathbb{R}$ l'éqution $f(\alpha) = 0$ a une unique solution.
   On résout :
$$\begin{aligned}\ln\left(e^x - e^{-x}\right) = 0 &\iff e^x - e^{-x} = 1 \iff e^{2x} - 1 = e^x \\ &\iff e^{2x} - e^x - 1 = 0\end{aligned}$$
   Soit $X = e^x$.
   L'éqution $X^2 - X - 1 = 0$ du second degré a pour discriminant : 5 et pour racines : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$
   Donc l'unique solution est $\alpha = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

   c) La pente vaut : $f'(\alpha) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$ et comme $e^\alpha - e^{-\alpha} = 1$ il reste :
$$e^\alpha + e^{-\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{6 + 2\sqrt{5} + 4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{-4\sqrt{5}}{-4} = \sqrt{5}$$
   donc le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.

3. **a)** On factorise dans le ln : $f(x) - x = \ln\left(e^x\left(1 - e^{-2x}\right)\right) - x = x + \ln\left(1 - e^{-2x}\right) - x \to 0$

   b) On a donc une asymptote d'équation $y = x$ en $+\infty$

   c) et comme $f(x) - x = \ln\left(1 - e^{-2x}\right) < 0$ car $1 - e^{-2x} < 1$ alors la courbe de f est en dessous de l'asymptote

4. Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).

   Il faut faire figurer sur la courbe

   - le point d'abscisse α (ordonnée nulle) avec sa tangente
   - l'asymptote oblique en respecant les positions relatives,

- l'asymptote verticale en 0
- la concavité n'a pas été étudiée, mais on trace au plus simple : courbe concave. (en dessous de la tangente en α)

5. **a)** h est dérivable sur D et

$$h'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 1 = \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x} - 1}$$

et on reconnait presau une primitive de g_λ
Pour $\lambda > 0$ on a $g_\lambda \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R} - \{\alpha\}$
$\int_{-\infty}^{+\infty}$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$:

- En $-\infty$: $\int_{-\infty}^{\alpha} g = \int_{-\infty}^{\alpha} 0 = 0$ (converge et)
- En $+\infty$: $\displaystyle\int_\alpha^M g(t)\,dt = \left[\frac{\lambda}{2} h(x)\right]_\alpha^M = \frac{\lambda}{2}(h(M) - h(\alpha))$
  Or $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha$ et $f(M) - M \to 0$ quand $M \to +\infty$ (asymptopte)
  Donc $\displaystyle\int_\alpha^M g(t)\,dt \to \frac{\lambda\alpha}{2}$
- Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge et vaut $\frac{\lambda\alpha}{2}$

Donc g_λ es tune densité si et seulement si $\lambda = 2/\alpha$

b) On a $G_\lambda(t) = 0$ si $t \leq \alpha$ et $G_\lambda(t) = \dfrac{1}{\alpha}(h(t) + \alpha)$ si $t \geq \alpha$

Exercice 2

1. **a)** E est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *la* matrice nulle vérifie $0K = K0 = 0$ donc $0 \in E$
Enfin si M et N sont dans E et m et y des réels alors :
$(xM + yN) K = xMK + yNK = (xM + yN) = xKM + yKN = K(xM + yN)$
Donc E est un sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

b) Si $M \in E$ est inversible alors $MK = M$ et $M^{-1}MK = K$ et $M^{-1}MK = M^{-1}M = I$. Or $K \neq I$ donc M n'est pas inversible.
Donc aucune matrice de E n'est inversible.

2. **a)** On calcule : $MK = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix}$

$KM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$

d'où $MK = KM = M$ équivaut à un système de 2 fois 9 équations par lignes : $a = c = g$ et $b = b = h$ et $c = a = k$ et $d = f = d$ et $e = e = e$ et $f = d = f$ et $g = k = a$ et $h = h = b$ et enfin $k = g = c$
Ce qui équivaut à $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$,.

Donc en paramètrant par a, b, d et e on a $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} / a, b, d, e \in \mathbb{R} \right\}$

b) Comme la première et la dernière colonnes des matrices de E sont identiques, les colonnes sont liées et la matrice n'est pas inversible.

c) On a $E = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Cette famille étant échelonnée, elle est libre et forme donc une base de E. Donc $\dim E = 4$.

3. **a)** On a $F \subset E$ (avec $a = x, b = y, d = y$ et $e = z$) et est engendré par $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$

qui est libre. Donc F est un sous espace vectoriel et une base en est ci-dessus.

b) Les matrices de F sont- symétriques donc diagonalisables.

c) On a $U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors

$(U - \alpha I) C = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (3-\alpha)x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + (4-\alpha)y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + (3-\alpha)z = 0 \end{cases}$ et par subsitutuion :

$\Longleftrightarrow (1) \begin{cases} (3-\alpha)\left[\frac{(\alpha-4)}{2}y - z\right] + 2y + 3z = 0 \\ x = \frac{(\alpha-4)}{2}y - z \\ 3\left[\frac{(\alpha-4)}{2}y - z\right] + 2y + (3-\alpha)z = 0 \end{cases}$

On simplifie : $(3-\alpha)\left[\dfrac{(\alpha-4)}{2}y - z\right] + 2y + 3z = \dfrac{-\alpha^2 + 7\alpha - 8}{2}y + \alpha z$

et $3\left[\dfrac{(\alpha-4)}{2}y - z\right] + 2y + (3-\alpha)z = \dfrac{3\alpha - 8}{2}y - \alpha z$ donc en combinant $L_1 + L_3 \to L_1$

$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{-\alpha^2+7\alpha-8}{2} + \frac{3\alpha-8}{2}\right) y = 0 \\ x = \frac{(\alpha-4)}{2}y - z \\ \frac{3\alpha-8}{2}y - \alpha z = 0 \end{cases}$

on retrouve $5\alpha - 8 - \frac{1}{2}\alpha^2$ en facteur de y en première ligne, qui apour racines $\alpha = 2$ et $\alpha = 8$

Donc

- **si** $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq 8$ alors $(1) \Longleftrightarrow (2) \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \\ \alpha z = 0 \end{cases}$
  - **si de plus** $\alpha \neq 0$
    $(2) \Longleftrightarrow x = y = z = 0$ et α n'est pas valeur propre si $\alpha \neq 0$, 2 et 8
  - **Si** $\alpha = 0$
    $(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$ qui a pour solutions Vect $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et 0 est valeur prorpe associé à la colonne $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **si** $\alpha = 2$ alors
  $(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$ donc 2 est valeur prorpe associé à la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **si** $\alpha =$ alors

  $(1) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 2y - z \\ 8y - 8z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = z \\ y = z \end{array} \right.$ donc 8 est valeur propre associé à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. **a)** φ est une application de F dans $\mathbb{R}$ (définie sur F et à valeurs dans $\mathbb{R}$)
Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de F et mx et y deux réels alors $(xA + yB) = (xa_{i,j} + yb_{i,j})$
Donc

$$\begin{aligned} \varphi(xA + yB) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} (xa_{i,j} + yb_{i,j}) \\ &= x\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} (xa_{i,j}) + y\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} b_{i,j} \\ &= x\varphi(A) + y\varphi(B) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire.

b) On a $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (-1)^{2+2} 1 = 1$
Donc $\text{Im}\varphi \neq \{0\}$ et $\dim(\text{Im}\varphi) \geq 1$ et $\dim(\text{Im}\varphi) = 1$ opuisque $\text{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$
et par le théorème du rang $\dim(\ker(\varphi)) = 3 - \dim(\text{Im}\varphi) = 2$

c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\text{Ker}\,\varphi$.
$\varphi(M) = x - y + x - y + z - y + x - y + x = 4x - 4y + z$
Donc $\varphi(M) = 0 \iff z = 4x - 4y$ et on trouve que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en sont éléments. Ils forment une famille libre donc une base de $\text{Ker}\,\varphi$.

Exercice 3

1. **a)** On a: $f_n(0) = -4$ et $f_n \underset{\rightarrow}{\rightarrow} +\infty$ en $+\infty$; f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'_n(x) = nx^{n-1} + 9x = x(nx^{n-1} + 9) > 0$.
f_n est donc bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[-4, +\infty[$. Comme $0 \in [-4, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ a donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On a donc $u_n \geq 0$ et $f_n(u_n) = 0$.

b) Pour calculer u_1 et u_2, il faut résoudre $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$:
$f_1(x) = x + 9x^2 - 4$ polynôme du second dégré de déterminant:$\Delta = 1 + 4.4.9 = 145$ donc $u_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18}$.qui est la racine positive de cette équation.
$f_2(x) = x^2 + 9x^2 - 4 = 10x^2 - 4 = 10(x - \sqrt{2/5})(x + \sqrt{2/5})$ donc $u_2 = \sqrt{2/5}$.

c) On a $f_n(2/3) = (2/3)^n + 9(2/3)^2 - 4 = (2/3)^n > 0$ et $f_n(0) = -4$
Donc $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(2/3)$ et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'ils ens osnt éléments, on a $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}$.
et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \frac{2}{3}[.}$

2. **a)** Soit $x \in]0, 1[$, on a: $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$ et comme $x < 1$ et $x^n > 0$ on a bien $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b) Donc, comme $u_n \in]0, \frac{2}{3}[$, ona $u_n \in]0, 1[$ et $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 < f_n(u_{n+1})$.
Donc $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que u_n et u_{n+1} en sont éléments, on a alors $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n et la suite u est croissante.

c) u est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc elle est convergente vers ℓ avec $0 \le \ell \le \frac{2}{3}$.

3. **a)** Comme $0 \le u_n \le 2/3$ et que la fonction puissance n est strictement coirssante pour $n > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ (sur $\mathbb{R}^-$ celà dépendrait de la parité de n) alors $0^n \le (u_n)^n \le (2/3)^n$ et comme $|2/3| < 1$ on a $(2/3)^n \to 0$ donc par encadrement $u_n \to 0$

b) Or ${u_n}^n + 9\,{u_n}^2 - 4 = 0$ alor spar passage à la limite,
Donc $9\ell^2 - 4 = 0$ et $\ell = \frac{2}{3}$ car $\ell \ge 0$. *Conclusion*: $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell = \frac{2}{3}}$

4. On cherche un équivalent de $\frac{2}{3} - u_n$ que l'on voit dans $9(u_n)^2 - 4 = 9\left(u_n - \frac{2}{3}\right)\left(u_n + \frac{2}{3}\right) = -(u_n)^n$
Donc

$$0 \le \frac{2}{3} - u_n = \frac{(u_n)^n}{9\left(u_n + \frac{2}{3}\right)} \le \frac{1}{9\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

et comme la série $\sum_n \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, par majoration de séries à termes positifs $\sum \frac{2}{3} - u_n$ converge également.

(attention : on n'a pas ici $\left(u_n \frac{3}{2}\right)^n \to 1$: c'est une forme indéterminée qu'il faut lever en repassant en exp)

Problème

Partie 1 : étude de quelques exemples.

1. Lors des deux premiers lancers, il peut y avoir 0 ou 1 changement: $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$
$(X_2 = 0) = (P_1P_2 \cup F_1F_2)$ événements incompatibles, $p(X_2 = 0) = p(P_1P_2) + p(F_1F_2)$ lancers indépendants, $p(X_2 = 0) = p(P_1)p(P_2) + p(F_1)p(F_2) = p^2 + q^2$.
Comme $(X_2 = 1) = \overline{(X_2 = 0)}$ alors $p(X_2 = 1) = 1 - p^2 - q^2 = 2pq$ car $p + q = 1$.

2. **a)** $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
$(X_3 = 0) = (P_1P_2P_3 \cup F_1F_2F_3)$ et comme précédemment $p(X_3 = 0) = p^3 + q^3 = (p + q)(p^2 - pq + q^2) = p^2 - pq + q^2$
$(X_3 = 2) = (P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3)$ et comme précédemment $p(X_3 = 2) = p^2q + q^2p = pq(p + q) = pq$
Enfin $p(X_3 = 1) = 1 - (p(X_3 = 0) + p(X_3 = 2)) = 1 - p^2 + pq - q^2 - pq = 1 - p^2 - q^2 = 2pq$

b) On a: $E(X_3) = 0p(X_3 = 0) + 1p(X_3 = 1) + 2p(X_3 = 2) = 0 + 1(2pq) + 2(pq) = 4pq$
$E({X_3}^2) = 0 + 1^2(2pq) + 2^2(pq) = 6pq$ d'où $V(X_3) = (4pq)^2 - 6pq = 2pq(3 - 8pq)$.

3. **a)** La loi de X_4 était demandée en prime: $X_4(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
$(X_4 = 0) = (P_1P_2P_3P_4 \cup F_1F_2F_3F_4)$ donc $p(X_4 = 0) = p^4 + q^4$
$(X_4 = 1) = (P_1F_2F_3F_4 \cup P_1P_2F_3F_4 \cup P_1P_2P_3F_4) \cup (F_1P_2P_3P_4 \cup F_1F_2P_3P_4 \cup F_1F_2F_3P_4)$ semblablement en commencant par F donc $p(X_4 = 1) = pq^3 + p^2q^2 + p^3q + qp^3 + q^2p^2 + q^3p = 2pq(q^2 + pq + p^2) = 2pq((p + q)^2 - pq) = 2pq(1 - pq)$
$(X_4 = 2)$ est plus compliqué.
$(X_4 = 3) = (P_1F_2P_3F_4 \cup F_1P_2F_3P_4)$ événements incompatibles donc
$p(X_4 = 3) = p(P_1F_2P_3F_4) + p(F_1P_2F_3P_4)$ les lancers étant indépendants,

$p(X_4 = 3) = 2p^2q^2$
D'où par système complet ($X_4 = 0, 1, 2$ ou 3), $p(X_4 = 2) = 1 - (p^4 + q^4) - 2pq(1 - pq) - 2p^2q^2 = 1 - p^4 - q^4 - 2pq$

b) Calculer $E(X_4) =$.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$. Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. $(X_n = 0) = (nPile \cup nFace)$ (incompatibles et lancers indépendants) donc $P(X_n = 0) = p^n + q^n$

2. $(X_n = 1)$ commence par P ou F et il y a un seul changement entre le $1er$ et le $(n-1)^{ème}$ lancer.
$(X_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{n-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i \bigcap_{i=k+1}^{n} F_i\right) \bigcup_{k=1}^{n-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i \bigcap_{i=k+1}^{n} P_i\right)$ réunion d'événements incompatibles: d'où

$$\begin{aligned}
p(X_n = 1) &= \sum_{k=1}^{n-1} p\left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i \bigcap_{i=k+1}^{n} F_i\right) + \sum_{k=1}^{n-1} p\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i \bigcap_{i=k+1}^{n} P_i\right) \text{ les lancers sont indépendants} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{k} p(P_i) \prod_{i=k+1}^{n} p(F_i)\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{k} p(F_i) \prod_{i=k+1}^{n} p(P_i)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(p^k q^{n-k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(q^k p^{n-k}\right) = q^n \sum_{k=0}^{n-1} (p/q)^k - q^n + p^n \sum_{k=0}^{n-1} (q/p)^k - p^n \\
&= q^n \frac{(p/q)^n - 1}{p/q - 1} - q^n + p^n \frac{(q/p)^n - 1}{q/p - 1} - p^n = q\frac{p^n - q^n}{p - q} - q^n + p\frac{q^n - p^n}{q - p} - p^n \\
&= \frac{1}{q - p}\left(q(-p^n + q^n) - q^n(q - p) + p(q^n - p^n) - p^n(q - p)\right) \\
&= \frac{1}{q - p}\left(-2qp^n + 2q^n p\right) = \frac{2pq}{q - p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

3. Pour avoir $n - 1$ changements en n lancers, il faut changer à chaque lancer. On commence par F ou P.

- Si n est pair on aura donc $n/2$ fois F et $n/2$ fois P.
  $(X_n = 1) = (PFPF...PF) \cup (FPFPFP...FP)$ (incompatibles) et $P(X_n = n - 1) = 2(pq)^{n/2}$
- Si n est impair en commençant par F on aura donc $(n+1)/2$ fois F et $(n-1)/2$ fois P et inversement en commençant par P: $(X_n = 1) = (PFPF...P) \cup (FPFPFP...F)$ (incompatibles) et $P(X_n = n - 1) = p^{(n+1)/2}q^{(n-1)/2} + q^{(n+1)/2}p^{(n-1)/2} = (pq)^{n/2}\left(\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}}\right)$

  Comme on peut commencer par F ou P , $P(X_n = n - 1) = 2\left(pq\right)^{n/2}$

4. Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4.

5. On a Z_k qui est le nombre de changements lors du k^{ième} lancer. Donc $X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k$ et $E(X_n) = \sum_{k=2}^{n} E(Z_k)$.

Reste à déterminer la loi de Z_k . Or la probabilité de changement dépend du résultat précédent. (P_{k-1}, F_{k-1}) est un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} p(Z_k = 1) &= p(Z_k = 1/P_{k-1})p(P_{k-1}) + p(Z_k = 1/F_{k-1}).p(F_{k-1}) \\ &= p(F_k/P_{k-1})p(P_{k-1}) + p(P_k/F_{k-1}).p(F_{k-1}) = p \cdot q + q \cdot p = 2pq \end{aligned}$$

Donc $E(Z_k) = 1.p(Z_k = 1) + 0.p(Z_k = 0) = 2pq$ et $E(X_n) = 2(n-1)pq$

Partie 3 : étude du cas $p = q = \frac{1}{2}$.

1. Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binômiale.

2. A chaque lancer, la proabilité de changer est de $\frac{1}{2}$, que le lancer précédent ait donné P ou F. Les changements/ou non sont ici indépendants les uns des autres. On peut en effectue n-1. Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})$

(EDHEC 2000)