Corrigé EDHEC eco 2001 par Pierre Veuillez

Exercice 1

$f_a(e_2) = 0 \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$

1. a) Les coordonnées des images dans la base $\mathcal{B}$ sont directement lisibles et on a :

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \text{ et } A_a^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} = 0$$

   b) On a $f_a(e_2) = 0$ donc 0 est valeur propre de f_a donc de A_a associée au vecteur propre e_2
   Donc 0 est une valeur propre de A_a
   $A_a^2 = 0$ donc (polynôme annulateur) si α est valeur propre de A_a alors $\alpha^2 = 0$ et $\alpha = 0$
   Conclusion : $\boxed{\text{0 est la seule valeur propre de } A}$

   c) **Si** A_a était diagonailisable on aurait alors $A_a = P \cdot 0 \cdot P^{-1}$ (la diagonale est remplie de 0) donc $A_a = 0$
   Donc A_a n'est pas diagonalisable.
   Comme 0 en est valeur propre, elle n'est pas inversible non plus.

2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.

   a) Comme $\mathcal{B}'$ cmoprend 3 vecteurs, il suffit de montrer qu'elle forme une famille libre :
   si $xu_1 + ye_2 + ze_3 = 0$ alors $x(ae_1 + e_2 - ae_3)u_1 + ye_2 + ze_3 = 0$ donc $xae_1 + (y + x)e_2 + (z - ax)e_3 = 0$ et come (e_1, e_2, e_3) est libre, on a $xa = 0$ donc $x = 0$ car $a \neq 0$ puis $y + x = 0$ donc $y = 0$ et enfin $z - ax = 0$ d'où $z = 0$
   La famille $\mathcal{B}'$ est donc bien libre. Donc une base de E

   b) On pourrait appliquer la formule de cahngement de base, mais il est plus rapide de calculer les images des vecteurs de la base :
   On peut passer par les coordonnées de u_1 : $(a, 1, -a)$ dans $\mathcal{B}$, son image a pour coordonnées : $A_a \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} = 0$ donc $f_a(u_1) = 0$
   ou directement utiliser la linéarité de f_a : $f_a(u_1) = f_a(ae_1 + e_2 - ae_3) = af_a(e_1) + f_a(e_2) - af_a(e_3) = 0$
   De plus $f_a(e_2) = 0$ et $f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3 = u_1$ d'où les coordonénes es images dans la base $\mathcal{B}'$ et la matrice de f_a dans cette base :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $g \circ g = f_a$.On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathcal{B}'$.

   a) La matrice de la composée est le produit des matrices : dans la base $\mathcal{B}'$ la matrice de f_a est K celle de g est M donc $M^2 = K$
   On a alors $MK = M \cdot M^2 = M^3 = M^2 \cdot M = KM$.

   b) On pose alors la matrie M à coefficients indéterminés : $M = \begin{pmatrix} a & x & y \\ b & d & z \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et on calcule les produits :

$MK = \begin{pmatrix} a & x & y \\ b & d & z \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $KM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x & y \\ b & d & z \\ c & e & f \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} c & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De $KM = MK$ on tire $c = e = b = 0$ et $f = a$ donc $M = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & d & z \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Enfin $M^2 = K$ donc $\begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & d & z \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ax+xd & 2ay+xz \\ 0 & d^2 & dz+za \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $a = 0$ et $d = 0$ et enfin $xz = 1$

Finalement

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.

4. Et réciproquement si $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $xz = 1$ alors $M^2 = K$ donc les application linéaires associées dans vérifient $g \circ g = f_a$

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1 , R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1,P_2 et P_3. On a donc $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $0 < P_{\text{i}} < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.
On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. a) X_i compte le nombre de résultat parmi $\{R_i\}$ non obtenus. Donc $X_1 + X_2 + X_3$. compte le nombre de résultats parmi $\{R_1, R_2, R_2\}$ non obtenus. Donc le nombre total de résultats non obtenus est bien $X = X_1 + X_2 + X_3$

   b) $(X_i = 1)$ signifie qu'en n épreuves indépendantes, le nombre de "R_i" obtenu est nul. Or ce nombre suit une loi binômiale de paramêrtes (n, P_i) donc $\mathrm{P}(X_i = 1) = \binom{n}{0} P_i^0 (1 - P_i)^n = (1 - P_i)^n$ et

   Conclusion : $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left((1 - P_i)^n\right)}$

   c) Comme $E(X_i) = (1 - P_i)^n$ alors

   Conclusion : $\boxed{E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = (1 - P_2)^n = (1 - P_2)^n + (1 - P_3)^n}$

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_{i} en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local.

Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n$.

2. a) Comme $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ alors $1 - P_3 = P_1 + P_2$ donc $E(X) = f(P_1, P_2)$

   b) Comme $(x,y) \to x$ est C^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que $z \to z^n$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ alors $(x,y) \to (1-x)^n$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$

   Et de même pour f.

3. a) On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= n(1-x)^{n-1} \times -1 + n(x+y)^{n-1} \\ &= n\left[(x+y)^{n-1} - (1-x)^{n-1}\right] \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= n\left[(x+y)^{n-1} - (1-y)^{n-1}\right]\end{aligned}$$

   b) On a donc

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}(x+y)^{n-1} - (1-x)^{n-1} = 0 \\ (x+y)^{n-1} - (1-y)^{n-1} = 0 \quad L_2 - L_1\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{c}(x+y)^{n-1} - (1-x)^{n-1} = 0 \\ (1-x)^{n-1} = (1-y)^{n-1}\end{array}\right.$$

et $(1-x)^{n-1} = (1-y)^{n-1} \iff 1-x = 1-y$ car $n-1>0$ et donc la fonction $x \to x^{n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $1-x \geq 0$ et $1-y \geq 0$

Donc

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}(2x)^{n-1} - (1-x)^{n-1} = 0 \\ x = y\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{c}2x = 1-x \\ x = y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x = 1/3 \\ y = 1/3\end{array}\right.$$

Donc le seul point de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. a) On calcule alors les dérivées partielles secondes au oint $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= n(n-1)\left[(x+y)^{n-2} + (1-x)^{n-2}\right] \\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) &= n(n-1)\,2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= n(n-1)(x+y)^{n-2} \\ s &= n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= n(n-1)\left[(x+y)^{n-2} + (1-y)^{n-2}\right] \\ t &= n(n-1)\,2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\end{aligned}$$

On a donc $r\,t-s^2=\left[n\,(n-1)\,2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]^2-\left[n\,(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]^2=\left[n\,(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]^2(4-1)>0$

Donc sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$, f a un extremum local en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Et comme $t>0$,'est un minimum local.

Donc pour avoir le moins de résultats non obtenus (en moyenne), il faut les avoir tous avec la même probabiltié $\frac{1}{3}$.

b) Et en ce cas on a $E(X)=3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=0 \text{ si } x<0 \\ f(x)=xe^{-\dfrac{x^2}{2}} \text{ si } x\geqslant 0\end{cases}$

1. f est continue sur par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$.
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre en $\pm\infty$
   $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt=0$
   $\int_0^M xe^{-\dfrac{x^2}{2}}dx=\left[-e^{-\dfrac{x^2}{2}}\right]_0^M=1-e^{-\dfrac{M^2}{2}}\to 1$ quand $M\to+\infty$
   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est bien une densité}}$
   La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f.
2. a) Si $x\leq 0$ alors $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$
   et si $x\geq 0$: $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^x te^{-\dfrac{t^2}{2}}dt=1-e^{-\dfrac{x^2}{2}}$
   b) La médiane n'est pas négative ($F(x)=0$).
   et pour $x\geq 0$: $F(x)=\frac{1}{2}\iff 1-e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2}\iff\frac{x^2}{2}=\ln(2)\iff x=\sqrt{2\ln(2)}$
   Conclusion : $\boxed{\mu=\sqrt{2\ln(2)}}$
3. On appelle mode de la variable X tout réel x en lequel f atteint son maximum.
   On étudie les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.(f n'est pas maximale sur $\mathbb{R}^-$)
   f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\dfrac{x^2}{2}}-x^2e^{-\dfrac{x^2}{2}} \\ &= \left(1-x^2\right)e^{-\dfrac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

x	0		1		
$1-x^2$		$+$	0	$-$	2° degré
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc f est maximale en 1 où elle vaut :

Conclusion : $\boxed{M_0=f(1)=e^{-1/2}=1/\sqrt{e}}$

4. a) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $1 = V(Y^2) = E(Y^2) - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt$
et par parité, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$
Et comme $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ avec $\int_{-\infty}^{0} = 0$ et $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ alors X a une espérance et

Conclusion : $\boxed{E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.}$

b) X^2 a une espérance si $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge :
$\int_0^M t^2 f(t)\,dt = \int_0^M t^3 e^{-t^2/2} dt$ **idée :** conserver un t avec $e^{-t^2/2}$ pour pouvoir le primitiver.
$u(t) = t^2 : u'(t) = 2t : v'(t) = te^{-t^2/2} : v(t) = -e^{-t^2/2}$ et u et v C^1 donc

$$\begin{aligned} \int_0^M t^2 f(t)\,dt &= \left[-e^{-t^2/2} t^2\right]_0^M - \int_0^M -2te^{-t^2/2} dt \\ &= -\frac{M^2}{e^{M^2/2}} + 2\left[-e^{-t^2/2}\right]_0^M \\ &= -\frac{M^2}{e^{M^2/2}} + 2 - 2e^{-M^2/2} \\ &\to 2 \end{aligned}$$

avec $M^2 = x = o\left(e^{x/2}\right)$
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge et vaut $2 = E(X^2)$.

Conclusion : $\boxed{X \text{ a une variance et } V(X) = 2 - \frac{\pi}{2}}$

Problème

Partie 1

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a : $0 < k \leq t \leq k+1$ donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ et comme les bornes : $k \leq k+1$
alors Montrer que : , $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}.}$

2. L'inégalité n'est vraie que pour $k \geq 1$ et donc $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$ pour tout $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \text{ pour avoir } k > 1 \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \ln(n) + 1.}$

Partie 2

1. Par récurrence on doit d'abord montrer que u_n est définie avant de regrarder son signe :

   a) – Pour $n = 0$ est-ce que u_0 est défini et strictement positif ? Oui car $u_0 = 1$
   – Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n défini et strictement positif.
   Alors $u_n + \dfrac{1}{u_n}$ est bien défini car $u_n \neq 0$ et est strictement positif.
   – Donc par récurrence, chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

   b) On a donc pour tout entier n : $u_{n+1} > u_n$ car $1/u_n > 0$, et la suite u est donc croissante.

2. a) O na

$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$

   b) Par récurrence :

   – Est-ce que, pour $n = 1$, $u_1^2 = 2 \cdot 1 + 1 + \sum_{k=0}^{0} \dfrac{1}{u_k^2}$?

   Or $\sum_{k=0}^{0} \dfrac{1}{u_k^2} = \dfrac{1}{u_0^2} = 1$ et $u_1^2 = 2^2 = 4$ donc oui !

   – Soit $n \geq 1$ tel que $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2}$.

   Est-ce que $u_{n+1}^2 = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}$?

   Or $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2} = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2} + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}. = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}$

   – Donc la formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$

   Variante : en voyant la somme telescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= u_n^2 - 1 \text{ d'une part et d'autre part} \\ \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} 2 + \frac{1}{u_k^2} = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}\end{aligned}$$

   donc $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

   c) Or $1/u_k^2 \geq 0$ donc $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k^2} \geq 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2n + 1$.

   Finalement, comme $2n + 1 \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$, par minoration $u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ et $u_n = |u_n| = \sqrt{u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$

3. a) On veut majorer $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ et pour cela, minorer $\frac{1}{u_k^2}$:

   Pour tout n : $u_n^2 \geq 2n + 1 > 2n$ donc $\dfrac{1}{u_n^2} \leq \dfrac{1}{2n}$ si $n > 0$ (si $n \geq 1$) le terme pour $n = 0$ est donc à garder à part.

   Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2} = \dfrac{1}{1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{2n} = 1 + \dfrac{1}{2} v_{n-1}$ si $n - 1 \geq 1$ i.e. $n \geq 2$

D'où

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 1 + 1 + \frac{1}{2} v_{n-1}$$

Conclusion : $\boxed{u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 2}$

b) Et comme $v_n \leq 1 + \ln(n)$ pour tout entier $n \geq 2$ on a donc $v_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1 + \ln(n-1)}{2} = 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

c) On a alors l'encadrement :

$$2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

et comme la fonction $\sqrt{}$ est strictmeent croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'ils en sont éléments :

$$\begin{aligned} \sqrt{2n+1} &\leq u_n \leq \sqrt{2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}} \text{ donc} \\ \sqrt{2n}\sqrt{1 + 1/2n} &\leq u_n \leq \sqrt{2n}\sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}} \text{ et} \\ \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} &\leq \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}} \end{aligned}$$

et par encadrement $u_n/\sqrt{2n} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$ donc $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

Partie 3

1. On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \geq 0$

   On affecte la valeur u_n à `u`. On calcule les termes de u_1 à u_n (`for k :=1 to n`)

```
Program suite ;
var n,k :integer ; u :real ;
begin
     u :=1 ;
     writeln('valeur de n ?') ; readln(n) ;
     for k :=1 to n do u :=u+1/u ;
     writeln(u) ;
end.
```

2. a) Ecrire un deuxième programme, toujours en Turbo Pascal, qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geqslant 100$:

   On calcue u_n et n tant que $u_n < 100$ (ou jusqu'à ce que $u_n \geq 100$, mais cela demande de vérifier que le premier terme ne vérifie pas la condition)

   On n'oublie pas d'intialiser n.

```
Program suite ;
var n :integer ; u :real ;
begin
u :=1 ;n :=0 ;
while u<100 do
     begin n :=n+1 ; u :=u+1/u ; end ;
writeln(n) ;
end.
```

b) On donne $ln2 < 0,70$ et $ln5 < 1,61$.

On a $5000 = 5\cdot(5\cdot 2)^3 = 5^4 2^3$ donc $\ln(5000) = 4\ln(5)+3\ln(2) < 4\cdot 1,61+3\cdot 0,70 = 8,54$

Conclusion : $\boxed{\ln 5000 < 8,54}$

c) Montrer que l'entier n trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.

Pour que n soit le plus petit entier vérifiant $u_n \geq 100$, il faut et suffit que $u_n \geqslant 100$ et $u_{n-1} < 100$

Or on a vu que $2n+1 \leq u_n^2 \leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$

- Pour $n = 4994$ on a $\ln(n-1) < \ln(5000)$ donc $2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2} \leq 9988+2.5+8.54 < 10000$ donc $(u_{4994})^2 < 10000$ et $u_{4994} < 1000$
  Donc la valeur recherchée est strictement supérieure à 4994
- Pur $n = 5000$ on a $2n+1 = 10001 > 10000$ donc $u_{5000}^2 > 10000$ et $u_{5000} > 100$
  Donc la valeur recherchée est inférieure ou égale à 5000.

Conclusion : $\boxed{n \text{ est compris entre 4995 et 5000}}$