Corrigé Edhec 2002 voie Eco par Pierre Veuillez

Exercice 1

X suit la loi exponentielle de paramètre λ. On note Y la partie entière de X, et $Z = X - Y$.

1. **a)** On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ car $p(X < 0) = 0$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} p(Y = k-1) &= p(k-1 \leq X < k) = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_{t=k-1}^{k} \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

c) Et $\left(\bar{Y}+1\right)(\Omega) = [[1, +\infty[[: p(Y+1 = k) = e^{-\lambda(k-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right) = \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$
On reconnait donc que $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

d) Donc $E(Y+1) = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}}$ et $E(Y) = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1$

2. **a)** Pour $0 \leq x < 1$, On applique la formule des probabiltiés totales avec $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'événements :

$$p(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(Z \leq x \cap Y = k)$$

Avec $(Z \leq x \cap Y = k) = (X - [X] \leq x \cap [X] = k) = (k \leq X \leq k + x)$ car $0 \leq x < 1$
Et comme

$$\begin{aligned} p(k \leq X \leq k + x) &= \int_{k}^{k+x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left(e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+x)}\right) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda x}\right) e^{-\lambda k} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} p(Z \leq x) &= \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda}\right)^{k} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

(la série est convergente d'après le th des probabilités totales)

b) Donc la fonction de répartition de Z est :

- $G(x) = 0$ si $x < 0$
- $G(x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$ si $x \in [0, 1[$
- $G(x) = 1$ si $x \geq 1$

G est continue sur $\mathbb{R}- \{0, 1\}$

- en 0^- on a $G(x) = 0 \to 0$ et comme $G(0) = \dfrac{1 - e^{-\lambda 0}}{1 - e^{-\lambda}} = 0$ alors G est continue en 0

- En 1^- on a $G(x) = \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \to \frac{1-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = 1 = G(1)$ donc G continue en 1.

et G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$

Finalement Z est une variable à densité de densité $g(x) = G'(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}$ si $x \in [0,1[$ et 0 ailleurs.

c) On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,dt$ impropre en $\pm\infty$:

$\int_{-\infty}^{0} tg(t)\,dt = 0$ et $\int_{1}^{+\infty} tg(t)\,dt = 0$ il reste donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 tg(t)\,dt &= \int_0^1 t\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda}}dt \\
&= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 te^{-\lambda t}dt \quad \text{à la volée} \\
&= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\left[-\frac{1}{\lambda}te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\right]_0^1 \\
&= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\left(e^{-\lambda}-1\right)\right) \\
&= -\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} + \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Donc Z a une espérance qui est : $E(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

On aurait pu passer par $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$ donc

$E(Z) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

Mais on n'a pas le théorème dans le cours pour un mélange de variables discrètes et à densité.

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul.

On lance n fois une pièce de monnaie donnant " pile " avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et " face " avec la probabilité $q = 1-p$. On appelle k-chaîne de " pile " une suite de k lancers consécutifs ayant tous donnés " pile ", cette suite devant être suivie d'un " face " ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout k de $[[1,n]]$ on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de " pile " obtenues au cours des n lancers.

Pour tout k de$[[1,n]]$, on pourra noter P_k l'événement " on obtient " pile " au k^{eme} lancer ".

1. Y_n est le nombre de n chaine de pile en n lancers.

   Il y en a au plus une qui n'est réalisée que si tous les lancers ont donné pile. Donc $Y(\Omega) = \{0,1\}$

   $(Y_n = 1) = P_1 \cap \cdots \cap P_n$ et comme les lancers sont indépendants :

   $p(Y_n = 1) = p(P_1)\ldots p(P_n) = p^n$ donc $p(Y = 0) = 1 - p^n$ et $E(Y_n) = p^n$

2. Pour avoir $Y_{n-1} = 1$ il faut avoir une $n-1$ chaine de pile. Il ne reste donc qu'un seul lancer Face qui ne peut être qu'au début ou à la fin :

   $(Y_{n-1} = 1) = [P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n] \cup [F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n]$ les deux sont incompatibles donc

$p(Y_{n-1}=1) = p[P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n] + p[F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n]$ les lancers sont indépendants donc

$p(Y_{n-1}=1) = p^{n-1}q + qp^{n-1} = 2qp^{n-1}$

Comme les seules valeurs possibles de Y_{n-1} sont là encore 0 et 1 on a :

$$\begin{aligned} E(Y_{n-1}) &= 0p(Y_{n-1}=0) + 1p(Y_{n-1}=1) \\ &= 2qp^{n-1} \end{aligned}$$

3. Dans cette question, k désigne un entier de$[[1, n-2]]$

Pour tout i de $[[1, n]]$ on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de “ pile ” commence au i^{eme} lancer et qui vaut 0 sinon.

a) Avoir $(X_{1,k}=1)$ signifie qu'une k chaine de "pile" commence au premier lancer (et se finit donc au $k+1^{\text{ème}} < n$)

$(X_{1,k}=1) = P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ lancers indépendants $p(X_{1,k}=1) = p(P_1)\dots p(P_k)\, p(F_{k+1})$ et $P(X_{1,k}=1) = p^k q$

b) Pour $i \in [[2, n-k]]$ avoir $(X_{i,k}=1)$ signifie qu'une telle chaine

- commence au $i^{\text{ème}} > 1$ lancer et donc qu'elle était précédée d'un "face";
- qu'elle se finit au $k+i-1^{\text{ème}} < n$ (de i à $i+k-1$ il y a $(i+k-1)-(i)+1 = k$ lancers)
- et est donc suivie d'un "face" ($i \leq n-k$ donc $k+i-1 \leq n-1 < n$)

Donc $(X_{1,k}=1) = F_{i-1} \cap P_i \cdots \cap P_{k+i-1} \cap F_{k+i}$ et comme les lancers sont indépendants pour tout $i \in [[2, n-k]]$ on a bien

$$p(X_{i,k}=1) = q^2 p^k.$$

c) Enfin pour $X_{n-k+1,k}=1$, on a k "pile" à partir du $n-k+1^{\text{ème}}$ lancer donc jusqu'au $n^{\text{ième}}$ et face juste avant :

Donc $(X_{n-k+1,k}=1) = F_{n-k} \cap P_{n-k+1} \cap \cdots \cap P_n$ donc

$$P(X_{n-k+1,k}=1) = qp^k.$$

d) Le nombre total de k listes de pile est la somme de celles qui commencent à 1, à 2 ... à $n-k+1$

Donc $Y_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k}$ et $E(Y_k) = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(X_{i,k})$

De plus pour $i \in [[2, n-k]]$: $E(X_{i,k}) = p(X_{i,k}=1) = q^2 p^k$ (loi de Bernouilli)

et de même $E(X_{0,k}) = qp^k$ et $E(X_{n-k+1,k}) = qp^k$

Et

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= \sum_{i=2}^{n-k} qp^k + 2qp^k = q^2 p^k \sum_{i=2}^{n-k} 1 + 2qp^k \\ &= (n-k-1)\, q^2 p^k + 2qp^k \end{aligned}$$

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. a) Sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $f(x) = \frac{-x\ln x}{1+x^2}$ donc f est continue comme quotient de fonctions continues $(1+x^2 \neq 0)$

   En 0 : pour $x > 0$: $x\ln(x) = \ln(x)/(1/x) \to 0$ quand $x \to 0$ car $\ln(x) = o(1/x)$ donc $f(x) \to 0 = f(0)$ quand x tend $\to 0$ et f est continue en 0.

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$

   b) Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{-x\ln x}{1+x^2}$ d'où le tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$-x$	0	$-$		$-$	
$\ln(x)$	$\vert\vert$	$\nearrow -$	0	$+ \nearrow$	
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	

2. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors pour tout x positif, f est continue sur $[0,x]$ et $\int_0^x f(t)\,dt$ est bien définie.

   Donc F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$

3. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on pose : $g(x) = F(x) - x$.

   a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors $x \to \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

   Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $g'(x) = f(x) - 1$

   Donc pour $x > 0$

$$g'(x) = \frac{-x\ln(x)}{1+x^2} - 1 = \frac{-x\left(\ln(x) + \frac{1}{x} + x\right)}{1+x^2} = \frac{-xh(x)}{1+x^2}$$

   avec $h(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + x$

   b) h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{-1+x+x^2}{x^2}$

   $-1+x+x^2$ est polynôme du second degré qui a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$ et pour racines $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$

   En 0^+ : $h(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(x)}{1/x} + 1 + x^2\right) \to +\infty$ car $\ln(x) = o(1/x)$

   En $+\infty$: $h(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + x \to +\infty$

   En α : $h(\alpha) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}-1}$ une valeur numérique serait la bienvenue, mais on n'a pas de calculatrice ...

   On bricole : $\sqrt{5} \geq \sqrt{4} = 2$ donc $\sqrt{5} - 1 \geq 1$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \geq 0,5$

   Donc $\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \geq 0$ d'après la valeur numérique fournie. Et $h(\alpha) > 0$

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+ \searrow$	$+$	$\nearrow +$	
$-x$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$	-1	$-$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow -$		$\searrow -$	

c) Donc $g < 0$ sur $]0, +\infty[$ et nulle en 0.
N.B. on a donc $F(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$

4. On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$

a) Par récurrence, en prenant l'image par F pour passer d'une étape à la suivante.
$F' = f$ donc $F' \geq 0$ sur $[0, 1]$ et F y est croissante.

- On a $u_0 \in [0, 1]$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0, 1]$ alors $0 \leq u_n \leq 1$ et comme F est croissante sur $[0, 1]$, $F(0) \leq F(u) \leq F(1)$ avec $F(0) = \int_0^0 = 0$ et $F(1) \leq 1$ d'après le signe de g.
Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$
- Donc pour tout entier n, $u_n \in [0, 1]$

N.B. pour la récurrence, il ne suffit pas d'avoir $u_n \geq 0$ car f n'est positive que sur $[0, 1]$

b) On vient de voire que $u_n \in [0, 1]$ donc $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} = F(u_n) \leq u_n$ (signe de g sur $\mathbb{R}^+$)
Et (u_n) est décroissante.

c) u est décroissante et minorée par 0 donc convergente. vers une limite $\ell \geq 0$
Comme F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\ell \in \mathbb{R}^+$ alors F est continue en ℓ donc $F(\ell) = \ell$.
Or $F(x) < x$ pour tout $x > 0$ donc ℓ ne peut pas être strictement positive et finalement, $u_n \to 0$

Problème
Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.
On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$.

1. a) On a $E = \{aI + bJ + cK + dL / a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(I, J, K, L)$ donc E est un espace vectoriel.

b) Si $aI + bJ + cK + dL = 0$ alors on trouve dans la ligne 1 $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 0$
Donc la famille (I, J, K, L) est libre.

c) (I, J, K, L) est libre et génératrice de E donc est une base de E.
Donc $\dim E = 4$

2. a) On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L$

$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$J^3 = J^2 J = LJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

$L^3 = L^2 L = L$

Donc J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.

b) On a alors $JK = JJ^3 = J^2J^2 = L^2 = I$ et $KJ = J^3J = I$

$KL = KJ^2 = KJJ = IJ = J$ et $LK = J^2K = J$

$JL = JK^2 = JKK = IK = K$ et $LJ = K$

donc JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.

c) En développant une combinaison linéaire de 2 matrices de E :
$(aI + bJ + cK + dL)(a'I + b'J + c'K + d'L)$, on obtient une combinaison linéaire des produits des matrices I, J, K et L, qui sont tous dans E.

Donc le produit se trouve encore dans E.

3. **a)** L est symétrique donc diagonalisable.

b) $$(L - \alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} -\alpha x + z = 0 \\ -\alpha y + t = 0 \\ x - \alpha z = 0 \\ y - \alpha t = 0 \end{array}\right. \iff (1)\left\{\begin{array}{c} z = \alpha x \\ t = \alpha y \\ x(1-\alpha^2) = 0 \\ y(1-\alpha^2) = 0 \end{array}\right.$$

- Si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1$ alors $(1-\alpha^2) = 0$ Donc $(1) \iff x = y = z = t = 0$ et α n'est pas valeur propre de A.
- Si $\alpha = 1$ alors $(1) \iff (1)\left\{\begin{array}{l} z = x \\ t = y \end{array}\right.$ donc 1 est valeur propre est son sous-espace propre associé est : $\mathcal{S}_1 = \mathrm{Vect}\left((1,0,1,0)\,(0,1,0,1)\right)$
- Si $\alpha = 1$ alors $(1) \iff (1)\left\{\begin{array}{l} z = -x \\ t = -y \end{array}\right.$ donc -1 est valeur propre est son sous-espace propre associé est : $\mathcal{S}_{-1} = \mathrm{Vect}\left((1,0,-1,0)\,(0,1,0,-1)\right)$

4. On considère les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Si $x\,u_1 + y\,u_2 + z\,u_3 + t\,u_4 = 0$ alors $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z+t=0 & \\ x-y+z-t=0 & L_2 - L_1 \\ x+y-z-t=0 & L_3 - L_1 \\ x-y-z+t=0 & L_4 - L_1 \end{array}\right.$ donc

$\left\{\begin{array}{ll} x+y+z+t=0 & \\ -2y-2t=0 & \\ -2z-2t=0 & \\ -2y-2z=0 & L_4 - L_2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z+t=0 & \\ -2y-2t=0 & \\ -2z-2t=0 & \\ -2z+2t=0 & L_4 - L_3 \end{array}\right.$ et $t = 0$ enfin par substitution : $x = y = z = 0$

Donc (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre a 4 vecteurs dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ de dimension 4. Donc est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

b) On calcule les produits :

$$L\,u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1$$ donc u_1 colonne propre associé à la valeur propre 1 et de même

$L\,u_2 = u_2$ associé à 1; $\quad L\,u_3 = -u_3$ et $\quad L\,u_4 = -u_4$ associés à -1

$$J + K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ et

$(J+K)\,u_1 = 2u_1$ et u_1 est un colonne propre de $J+K$ associé à 2;

$(J+K)\,u_2 = -2u_2$ et u_2 est associé à -2;

$(J+K)\,u_3 = 0$ et $(J+K)\,u_4 = 2u_4$ donc u_3 et u_4 sont associés à 0;

$$\begin{array}{ccc} 1 & — & 2 \\ \text{I} & & \text{I} \\ 4 & — & 3 \end{array} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix}$$

c) et $A = p \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-2p) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = p\,(J+K) + (1-2p)\,L$

5. **a)** $A\,u_1 = (p\,(J+K) + (1-2p)\,L)\,u_1 = p\,(J+K)\ u_1 + (1-2p)\,L\,u_1$ et comme u_1 est colonne propre de $J+K$ et de L alors :

$= 2p\,u_1 + (1-2p)\,u_1 = u_1$

$A\,u_2 = p\,(J+K)\,u_2 + (1-2p)\ L\,u_2 = -2p\,u_2 + (1-2p)\,u_2 = (1-4p)\,u_2$

$A\,u_3 = p\,(J+K)\,u_3 + (1-2p)\ L\,u_3 = -\,(1-2p)\ u_3$

$A\,u_4 = p\,(J+K)\,u_4 + (1-2p)\ L\,u_4 = -\,(1-2p)\ u_4$

Donc (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de colonnespropres de A et A est diagonalisable.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_1$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$ on a $A = P\,D\,P^{-1}$

b) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$

Donc $P\left(\frac{1}{4}P\right) = I$ et $\frac{1}{4}P\,P = I$ donc $P^{-1} = \frac{1}{4}P$

6. **a)** On a $(X_n = 1, X_n = 2, X_n = 3, X_n = 4)$ qui forme un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p\,(X_{n+1} = 1) &= p\,(X_{n+1} = 1/X_n = 1)\,p\,(X_n = 1) + p\,(X_{n+1} = 1/X_n = 2)\,p\,(X_n = 2) \\ &\quad + p\,(X_{n+1} = 1/X_n = 3)\,p\,(X_n = 3) + p\,(X_{n+1} = 1/X_n = 4)\,p\,(X_n = 4) \\ &= 0p\,(X_n = 1) + p \cdot p\,(X_n = 2) + (1-2p)\,p\,(X_n = 3) + p \cdot p\,(X_n = 4) \end{aligned}$$

ce qui est bien le produit de la première ligne de A et de la colonne C_n

De même pour les trois autres lignes. Donc $C_{n+1} = A \cdot C_n$.

b) Donc la suite C est géométrique matricielle et

$$C_n = A^n \cdot C_0 = \left(PDP^{-1}\right)^n C_0 = \frac{1}{4} P \cdot D^n \cdot P \cdot C_0$$

On a donc, en commençant le produit par la droite (il est 3 fois plus rapide de faire un produit matrice×colonne que matrices×matrice)

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{4} P D^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&=
\end{aligned}$$

Comme le point est en 1 à l'instant 0 on a donc :

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{4} P \cdot D(p, 1-2p)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (1-4p)^n \\ (2p-1)^n \\ (2p-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + (1-4p)^n + 2(2p-1)^n \\ 1 - (1-4p)^n \\ 1 + (1-4p)^n - 2(2p-1)^n \\ 1 - (1-4p)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Et on a finalement

$$\begin{aligned}
p(X_n = 1) &= \frac{1}{4} \left[1 + (1-4p)^n + 2(2p-1)^n\right] \\
p(X_n = 2) &= \frac{1}{4} \quad \left[1 - (1-4p)^n\right] \\
p(X_n = 3) &= \frac{1}{4} \left[1 + (1-4p)^n - 2(2p-1)^n\right] \\
p(X_n = 4) &= \frac{1}{4} \left[1 - (1-4p)^n\right]
\end{aligned}$$