Corrigé EDHEC 2004 Eco par Pierre Veuillez

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$

1. La fonction $t\to\frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[0,1]$ (car $1+t+t^n\neq 0$) donc $\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ est bien définie.

2. On a

$$\begin{aligned}u_0&=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^0}dt=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt=[\ln(2+t)]_0^1=\ln(3)-\ln(2)\\&=\ln(3/2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}u_1&=\int_0^1\frac{1}{1+t+t}dt=\int_0^1\frac{1}{1+2t}dt=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}\ln(3)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{u_0=\ln(3/2)\text{ et }u_1=\frac{1}{2}\ln(3)}$

3. a) Pour comparer les intégrales u_n et u_{n+1}, on compare leurs contenus :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t+t^n}-\frac{1}{1+t+t^{n+1}}&=\frac{t^{n+1}-t^n}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})}\\&=\frac{t^n(t-1)}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})}\\&\leq 0\text{ sur }[0,1]\\\text{et }\frac{1}{1+t+t^n}&\leq\frac{1}{1+t+t^{n+1}}\end{aligned}$$

et comme (ordre des bornes) $0\leq 1$, on a alors

$$\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt\leq\int_0^1\frac{1}{1+t+t^{n+1}}dt$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite }u\text{ est donc croissante.}}$

b) Là encore, on majore le contenu, par une quantité qui ne dépend pas de n :
Si $t\in[0,1]$ alors $t^n\geq 0$ et $1+t+t^n\geq 1+t>0$ donc $\frac{1}{1+t+t^n}\leq\frac{1}{1+t}$ et comme $0\leq 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt&\leq\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=[\ln(1+t)]_0^1\\&\leq\ln(2)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\ln(2)}$

c) La suite u est donc croissante et majorée par $\ln(2)$ donc convergente vers une limite $\ell \leq \ln(2)$

4. a) Pour écrire $\ln(2)-u_n$ sous forme d'intégrale, on écrit $\ln(2)$ sous la forme trouvée précédemment :

$$\begin{aligned} \ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}dt \end{aligned}$$

b) Pour obtenir le $\frac{1}{n+1}$, on devine une primitivation de t^n, que l'on va conserver dans la majoration du contenu :
sur $[0,1]$ on a $t+1 \geq 1$ et $t+t^n+1 \geq 1$ donc $(t+1)(t+t^n+1) \geq 1$ et $\frac{1}{(t+1)(t+t^n+1)} \leq \frac{1}{1}$
d'où $\frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)} \leq t^n$ car $t^n \geq 0$ et comme $0 \leq 1$

$$\begin{aligned} \ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}dt \\ &\leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^n}{n+1}\right]_0^1 \\ &\leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}}$

c) On a une majoration. Pour conclure, on cherche l'encadrement :
$0 \leq \frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}$ sur $[0,1]$ alors $0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$
Et comme $\frac{1}{n+1} \to 0$ alors par encadrement $\ln(2) - u_n \to 0$ et
Conclusion : $\boxed{u_n \to \ln(2) \text{ quand } n \to +\infty}$

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ est impropre en $+\infty$
On prouve sa convergence par comparaison :
$\frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1}{t^n}\frac{1}{1+1/t^{n-1}+1/t^n} \sim \frac{1}{t^n}$ car $n \geq 2$ et donc t^n et $t^{n-1} \to 0$ quand $t \to +\infty$
Comme $n > 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt$ converge (intégrale de Riemann) et par comparaison d'intégrales de fonction positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ *converge.*
Conclusion : $\boxed{v_n \text{ est bien définie pour } n \geq 2}$

b) Pour $t \geq 1$ on a $1+t \geq 0$ et $1+t+t^n \geq t^n > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}$ donc pour $1 \leq M$ on a

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{1}{1+t+t^n}dt &\leq \int_1^M \frac{1}{t^n}dt = \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\right]_1^M \\ &\leq \frac{1}{n-1}\left(-\frac{1}{M^{n-1}}+1\right) \\ &\leq \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

et par passage à la limite dans l'inégalité, quand $M \to +\infty$

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt \leq \frac{1}{n-1}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}}$

c) Donc par encadrement $v_n \to 0$ quand $n \to +\infty$
Comme l'intégrale impropre en $+\infty$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ converge, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt &= \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt \\ &\to \ln(2) \text{ quand } n \to +\infty\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt = \ln(2)}$.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E. (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$)
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E :
N.B. il peut être pratique de donner des noms au fonctions plutôt que de manipuler des $x \to \ldots$
Si le degré de P est inférieur ou égal à 2 alors celui de $x \to (x^2 - x)P(x)$ est inférieur ou égal à 4
Donc sa dérivée seconde sera de degré inférieur ou égal à 2.
Donc f est une application de E dans E.
Soient R et S de E alors $(x^2-x)(\alpha R + \beta S)(x) = \alpha(x^2-x)R + \beta(x^2-x)S(x)$
la dérivée seconde de $x \to (x^2-x)(\alpha R+\beta S)(x)$ est
$f(\alpha R + \beta S) = \alpha(x \to (x^2-x)R)'' + \beta(x \to \beta(x^2-x)S(x))'' = \alpha f(R) + \beta f(S)$
Donc f est un endomorphisme de E.

b) $f_1(x) = (x^2-x)e_0(x) = x^2 - x$ donc $f_1'(x) = 2x-1$ et $f_1''(x) = 2$ d'où $f(e_0) = 2e_0$
$f_1(x) = (x^2-x)e_1(x) = x^3 - x^2$ donc $f_1'(x) = 3x^2 - 2x$ et $f_1''(x) = 6x - 2$ d'où $f(e_1) = 6e_1 - 2e_0$
$f_1(x) = (x^2-x)e_2(x) = x^4 - x^3$ donc $f_1'(x) = 4x^3 - 3x^2$ et $f_1''(x) = 12x^2 - 6x$ d'où $f(e_2) = 12e_2 - 6e_1$

c) $f(e_0)$ a donc pour coordonnées dans $\mathcal{B}$: $(2,0,0)$ d'où la première colonne de A et de même pour les autres.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Comme la matrice A de f est triangulaire à termes diagonaux non nuls, elle est inversible. Donc f est un automorphisme de E.

2. a) Comme la matrice A de f est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes diagonaux : Les valeurs propres de f sont donc 2, 6, et 12.

Comme elle a trois valeurs propres distinctes, et que $\dim(E) = 3$, elle est diagonalisable

b) On résout alors pour chercher les vecteurs propres $P = x + yX + zX^2$

$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2y = 0 \\ 4y - 6z = 0 \\ 10z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 2 est $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(1)$.

$(A - 6I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -6z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 6 est $\mathcal{S}_6 = \text{Vect}(1 - 2X)$.

$(A - 12I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -10x - 2y = 0 \\ -6y - 6z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -\frac{1}{5}y \end{cases}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 12 est $\mathcal{S}_{12} = \text{Vect}\left(\frac{-1}{5} + X - X^2\right)$.

3. a) Comme f a trois valeurs propres distinctes, des vecteurs associés à chaque valeur propres forment une famille libre donc une base de vecteurs propres :

On classe dans l'ordre des valeurs propres qui sont sur la diagonale de D :

1 pour 2, $1 + 2X$ pour 6 et pour 12 on choisit $-5\left(\frac{-1}{5} + X + X^2\right) = 1 - 5X = 5X^2$ (pour que la première composante soit 1)

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ on a alors $A = P\,D\,P^{-1}$.

b) Par récurrence :

$PD^0P^{-1} = I = A^0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

alors $A^{n+1} = A^n A = P\,D^n\,P^{-1}P\,D\,P^{-1} = P\,D^n I\,D\,P^{-1} = P\,D^{n+1}\,P^{-1}$

Donc pour tout entier n : $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

4. a) Par Gauss on trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) et donc $A^n = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\times 2^n & 5\times 2^n & 3\times 2^n \\ 0 & -5\times 6^n & -5\times 6^n \\ 0 & 0 & 2\times 12^n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\times 2^n & 5\times 2^n - 5\times 6^n & 3\times 2^n - 5\times 6^n + 2\times 12^n \\ 0 & 10\times 6^n & 10\times 6^n - 10\times 12^n \\ 0 & 0 & 10\times 12^n \end{pmatrix}$$

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.

On pose $B = \frac{1}{12}A$.

Donc $B^n = \left(\frac{1}{12}\right)^n A$

Comme $\left(\frac{2}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \to 0$ et $\left(\frac{6}{12}\right)^n \to 0$ alors

tous les coefficients de B^n tendront vers 0 sauf ceux en 12^n dans A

Donc $B^n \to \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = J$ et $J^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} = J$

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (cest-à-dire donnant pile avec la probabilité et face également avec la probabilité), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Le premier pile advient au plus tôt au premier tirage et au plus tard au $n^{ème}$ lancer. Enfin, si l'on n'a pas de pile, $Z = 0$.

   Donc les valeurs possibles de Z sont : $Z(\Omega) = [[0, n]]$

   b) Si $k \neq 0$ (donc si $1 \leq k \leq n$) alors $(Z = k)$ signifie que l'on a le premier pile lors du $k^{ième}$ lancer.

   Donc $(Z = k) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$.

   Les lancers étant indépendants, $P(Z = k) = P(F_1)\ P(F_2)\dots P(F_{k-1})\ P(P_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ si $1 \leq k \leq n$.

   Enfin si $k = 0$ alors $Z = 0$ signifie que l'on a pas eu de pile lors de ces n lancers.

   Donc $(Z = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ et comme les lances sont indépendants, $P(Z = 0) = P(F_1)\dots P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   Donc $P(Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $P(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ si $1 \leq k \leq n$

   c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Z = k)$ en mettant à part la valeur $k = 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(Z=k) &= P(Z=0)+\sum_{k=1}^{n} P(Z=k) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \text{ réindexé } h=k-1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\sum_{h=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{h+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{h} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=1
\end{aligned}$$

Ce qui est cohérent avec une loi de variable aléatoire.

d) Dans le programme, `k` est le compteur de lancers, et `Z` la variable aléatoire.
On effectue des lancers jusqu'à ce que l'on ait pile `(lancer = 1)` ou que l'on ait effectué n lancers `or (k = n)`.

Si on obtient pile, (`lancer = 1`) alors `Z` est affecté du nombre de lancers effectués (`z := k`), sinon, il conserve sa valeur initiale (`z := 0`)

Enfin, le nombre maximal de lancer n est saisit au clavier par `Readln(n)`.

```
Program EDHEC2004 ;
var k, n, z, lancer :  integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(n) ; k := 0 ; z := 0 ;
Repeat
k := k + 1 ; lancer := random(2) ;
If (lancer = 1) then z := k ;
until (lancer = 1) or (k = n) ;
Writeln (z) ;
end.
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0,\ U_1,\dots,U_n$ telles que pour tout k de $\{0,1,...,n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k\geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Si $Z=0$, on a alors $X=0$.

   Si $Z=n$, on fait n tirages dans l'urne qui ne contient que des blanches et $X=n$

   Si $Z=k\in[[1,n-1]]$ on peut obtenir entre 0 et k boules blanches.

   Donc les valeurs possibles de X sont $X(\Omega)=[[0,n]]$

3. a) Quand $Z=0$, on a $X=0$ donc $P_{Z=0}(X=0)=1$ et $P_{Z=0}(X=i)=0$ si $1\leq i\leq n$.

b) Quand $Z = n$, on effectue n tirages dans l'urne n qui ne contient n boules blanches et 0 boules noires. On obtiendra donc n boules blanches.

Donc$P_{Z=n}(X = n) = 1$ et $P_{Z=n}(X = i)$ si $0 \leq i \leq n - 1$.

c) Quand $Z = k$ $(1 \leq k \leq n-1)$ on effectue k tirages indépendants dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n - k$ noires. Les boules étant équiprobables, la probabilité d'obtenir une blanche et de k/n à chaque tirage.

Donc le nombre de boules blanche obtenues suit une loi binomiale, $\mathcal{B}(k, k/n)$

$P_{Z=k}(X = i) = \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$ si $0 \leq\ i \leq\ k$ et $P_{Z=k}(X = i) = 0$ sinon.

4. a) On connaît les probabilités conditionnelles $P_{Z=k}(X = 0)$ et on veut la probabilité $P(X = 0)$.

On utilise donc la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z = k)_{k \in [[0,n]]}$

$$p(X = 0) = \sum_{k=0}^{n} P_{Z=k}(X = 0)\ P(Z = k)$$

Comme on a des formules particulières pour $k = 0$ et $k = n$, on les traite à part :

$$p(X = 0) = P_{Z=0}(X = 0)\ P(Z = 0) + P_{Z=n}(X = 0)\ P(Z = n) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{Z=k}(X = 0)\ P(Z = k)$$

Les valeurs $P_{Z=0}(X = 0)$, $P(Z = 0)$, $P_{Z=n}(X = 0)$ et $P(Z = n)$ ont déjà été calculées. Dans la somme, on a $0 \leq k$ avec $k \geq 1$ donc $P_{Z=k}(X = 0)$ est donnée par la loi binomiale.

$$\begin{aligned} p(X = 0) &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 0\, P(Z = n) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{array}{c} k \\ 0 \end{array}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{n}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \end{aligned}$$

b) Pour $X = n$, on ne peut obtenir n boules blanches qu'en faisant n tirages, donc si $Z = n$.

Donc $(X = n) = (Z = n \cap X = n)$

Comme on a $X = n$ dès que $Z = n$ (dans l'urne n, il n'y a que des boules blanches) $(X = n) = (Z = n)$

Donc

$$P(X = n) = p(Z = n) = \frac{1}{2^n}$$

c) Pour tout i de $\{1, 2, ..., n - 1\}$, on réutilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z = k)_{k \in [[0,n]]}$

$$p(X = i) = \sum_{k=0}^{n} P_{Z=k}(X = i)\ P(Z = k)$$

avec, là encore, les valeurs $k = 0$ et n à traiter à part et $P_{Z=k}(X = i)$ est sinon donné par la loi binomiale, donc avec deux formules différentes pour $k \geq i$ et $k < i$ (à exprimer par rapport à k, car c'est lui l'indice de sommation)

D'où le découpage de la somme:

$$\begin{aligned}
p\left(X=i\right) &= P_{Z=0}\left(X=i\right)\ P\left(Z=0\right)+P_{Z=n}\left(X=i\right)\ P\left(Z=n\right)\\
&\quad +\sum_{k=1}^{i-1}P_{Z=k}\left(X=i\right)\ P\left(Z=k\right)+\sum_{k=i}^{n-1}P_{Z=k}\left(X=i\right)\ P\left(Z=k\right)\\
&= 0+0++\sum_{k=1}^{i-1}0\cdot P\left(Z=k\right)+\sum_{k=i}^{n-1}P_{Z=k}\left(X=i\right)\ P\left(Z=k\right)\\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}
\end{aligned}$$

avec $k\geq 1$ donc $P\left(Z=k\right)=\left(1/2\right)^{k}$

5. On calcule $\sum_{i=0}^{n}P\left(X=i\right)$ en traitant à part $i=0$ et $i=n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}P\left(X=i\right) &= P\left(X=0\right)+P\left(X=n\right)+\sum_{i=1}^{n-1}P\left(X=i\right)\\
&= \frac{1}{2^{n}}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k}+\frac{1}{2^{n}}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}
\end{aligned}$$

La somme double $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}$ porte sur les i et k tels que$1\leq i\leq k\leq n-1$ que l'on réordonne : $1\leq k\leq n-1$ et $1\leq i\leq k$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\ \text{(on reconnaît le binôme)}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}-\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\right)^{k}-\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\
&= \sum_{h=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k}\\
&= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k}
\end{aligned}$$

D'où le total :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} P(X=i) &= \frac{2}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \\ &= 1\end{aligned}$$

Problème

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x\,e^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Quand $x \to 0^+$ on a $-\frac{n}{x} \to -\infty$ donc $f_n(x) = x\,e^{-\frac{n}{x}} \to 0 = f_n(0)$
   Et f_n est continue à droite en 0.

   b) On calcule la limite du taux d'accroissement :
   Quand $x \to 0^+$ on a $\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = e^{-\frac{n}{x}} \to 0$
   Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et sa dérivée en } 0 \text{ est } f_n'(0^+) = 0}$

2. a) f_n est composée et produit de fonctions dérivables (dénominateur $x \neq 0$) donc f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= e^{-\frac{n}{x}} + x\,e^{-\frac{n}{x}}\frac{n}{x^2} \\ &= e^{-\frac{n}{x}}\frac{x+n}{x}\end{aligned}$$

   et on a alors ($x^2 > 0$)

x		$-n$			0			$+\infty$
$x+n$	$-$	0	$+$			$+$		affine
x	$-$		$-$		0	$+$		
$f_n'(x)$	$+$		$-$		$\|\|$	$+$		
$f_n(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$-n\,e$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   b) En $+\infty$: $e^{-\frac{n}{x}} \to 1$ et donc $f_n(x) = x\,e^{-\frac{n}{x}} \to +\infty$ et de même
   En $-\infty$: $f_n(x) = x\,e^{-\frac{n}{x}} \to -\infty$
   En 0^- on a une forme indéterminée que l'on lève par le changement de variable $X = -\frac{1}{x}$

$$f_n(x) = -\frac{e^{nX}}{X} = -\frac{(e^n)^X}{X} \to -\infty$$

   car $X = o\left((e^n)^X\right)$ car $e^n > 1$

3. a) On a $e^u = 1 + u + u^2/2 + u^2\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \to 0$ quand $u \to 0$

   b) On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= x\,e^{-\frac{n}{x}} = x\left(1-\frac{n}{x}+\frac{n^2}{2x^2}+\frac{n^2}{x^2}\varepsilon\left(-\frac{n}{x}\right)\right) = x-n+\frac{n^2}{2x}+\frac{n}{x}\varepsilon\left(\frac{n}{x}\right) \\ &= x-n+\frac{n^2}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

   au voisinage de $\pm\infty$

c) On a donc $f_n(x) - (x-n) = \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$ et C_n admet pour asymptote la droite D_n d'équation $y = x - n$

Comme $\frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{n^2}{2} + o(1)\right)$ alors au voisinage de $+\infty$ la différence tend vers 0^+ et la courbe est au dessus de l'asymptote et en dessous en $-\infty$.

d) Pour C_1, il faut placer les asymptotes (oblique en $\pm\infty$ et verticale en 0) ainsi que la tangente horizontale en 0^+, le minimum en $-n$ avec une tangente horizontale et respecter le sens de variation.

4. a) Sur $\mathbb{R}^-$, f_n est maximale en $-n$ où elle vaut $-n/e < 0$ donc l'équation $f_n(x) = 1n'y$ a pas de solution.

Sur $]0, +\infty[$, f_n est continue et strictement croissante donc bijective de $]\lim_0 f_n, \lim_{+\infty} f_n[=]0, +\infty[$

Et comme $1 \in]0, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 1$ y a une unique solution u_n.

Conclusion : $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}, \text{ il existe un unique réel } u_n, \text{ tel que } f_n(u_n) = 1 \text{ (et } u_n > 0\text{)}}$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, comme $f_n(1) = e^{-n} < e^0$ car $-n < 0$ alors

$f_n(1) < f_n(u_n)$ et la fonction f_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et 1 et u_n en étant éléments, on a alors $1 < u_n$

On transforme alors l'équation définissant u_n :

Pour $x > 1$, si $f_n(x) = 1$ alors $x\, e^{-\frac{n}{x}} = 1$ donc $e^{-\frac{n}{x}} = \dfrac{1}{x}$ car $x \neq 0$ et $-\frac{n}{x} = -\ln(x)$ d'où finalement $x \ln(x) = n$

Conclusion : $\boxed{u_n \text{ est une solution de } x\ln(x) = n}$

c) g est dérivable sur $[1, +\infty[$ (car $x > 0$) et $g'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1 > 0$ pour $x \geq 1$

Donc g est continue et strictement croissante donc bijective de $[1, +\infty[$ dans $[\lim_1 g, \lim_{+\infty} g[= [0, +\infty[$ et admet donc une réciproque dont on a le tableau de variations par symétrie :

x	1	$+\infty$
$g(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

et

x	0	$+\infty$
$g^{-1}(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$

donc g^{-1} tend vers $+\infty$ en $+\infty$

De plus, comme $u_n \in [1, +\infty[$, que $n \in [0, +\infty[$ et que $g(u_n) = n$ alors $u_n = g^{-1}(n) \to +\infty$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

d) Comme $u_n \ln(u_n) = n$ et que $u_n > 1$ et donc $\ln(u_n) > 0$ alors $\ln[u_n \ln(u_n)] = \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$

D'où en factorisant : $\ln(n) = \ln(u_n)\left[1 + \dfrac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right]$ avec $[] \to 1$ car $\ln(X) = o(X)$ quand $X \to +\infty$

et finalement $\ln(u_n) \sim \ln(n)$.

L'erreur serait de dire qu'alors, les epxonentielles sont équivalente. On n'a pas de tel théorème.

On revient donc à $u_n \ln(u_n) = n$ d'où

Conclusion : $\boxed{u_n = \dfrac{n}{\ln(u_n)} \sim \dfrac{n}{\ln(n)} \text{ quand } n \to +\infty}$

5. a) On sait que $u_n = g^{-1}(n)$ donc comme $n < n+1$ et que g^{-1} est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que n et $n+1$ en sont éléments , alors $u_n < u_{n+1}$ et

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ est strictement croissante.}}$

b) On fait réapparaître f_{n+1} dans f_n

$$\begin{aligned} f_n\left(u_{n+1}\right) &= u_{n+1}\, e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = u_{n+1}\, e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+1}}} \\ &= f_{n+1}\left(u_{n+1}\right)\, e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \\ &= e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \end{aligned}$$

6. On pose $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n\left(t\right)\, dt$.

a) Pour encadrer l'intégrale, on encadre la fonction (qui est continue donc intégrable)
La suite u est croissante donc $u_n \leq u_{n+1}$ et
si $u_n \leq t \leq u_{n+1}$ alors $f_n\left(u_n\right) \leq f_n\left(t\right) \leq f_n\left(u_{n+1}\right)$ car f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $u_n,\ t$ et u_{n+1} en sont éléments.

Et comme $f_n\left(u_n\right) = 1$ et que $f_n\left(u_{n+1}\right) = e^{\dfrac{1}{u_{n+1}}}$ alors $1 \leq f_n\left(t\right) \leq e^{\dfrac{1}{u_{n+1}}}$ pour tout t de $\left[u_n,\, u_{n+1}\right]$

On sait que $u_n \leq u_{n+1}$ donc l'inégalité de la moyenne donne alors $\boxed{1 \leq \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\dfrac{1}{u_{n+1}}}.}$

b) Comme $u_{n+1} \to +\infty$ alors $e^{\dfrac{1}{u_{n+1}}} \to 1$ et par encadrement $\dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \to 1$

Conclusion : $\boxed{I_n \sim u_{n+1} - u_n \text{ lorsque } n \to +\infty}$

c) La somme partielle $\sum_{n=1}^{N}\left(u_{n+1} - u_n\right) = u_{N+1} - u_1$ par "simplification diagonale" et tend donc vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$
Donc la série $\sum_{n\geq 1}\left(u_{n+1} - u_n\right)$ diverge.
Comme $I_n \geq 0$ alors par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} I_n$ est de même nature
Conclusion : $\boxed{\sum_{n\geq 1} I_n \text{donc diverge.}}$