

-----  
MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 4 mai 2004, de 8h à 12h  
-----

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

## Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$  et on a, en particulier,  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt$

1. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , justifier l'existence de  $u_n$ .
2. Calculer  $u_0$  et  $u_1$ .
3. a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$   
c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
4. a) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , écrire  $\ln(2) - u_n$  sous la forme d'une intégrale.  
b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$   
c) Donner la limite de la suite  $(u_n)$

5. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose  $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant  $v_n$ .

b) Montrer que :  $\forall n \geq 2, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$

c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ , puis donner la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

## Exercice 2

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.

On note  $e_0, e_1, e_2$  les fonctions définies, pour tout réel  $x$  par  $e_0(x) = 1, e_1(x) = x$  et  $e_2(x) = x^2$  et on rappelle que  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$  est une base de  $E$ .

Soit  $f$  l'application qui à toute fonction polynomiale  $P$  de  $E$  associe la fonction  $Q = f(P)$ , où  $Q$  est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel  $x$  associe  $(x^2 - x)P(x)$ .

1. a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Déterminer  $f(e_0)$ ,  $f(e_1)$ , et  $f(e_2)$  en fonction de  $e_0$ ,  $e_1$  et  $e_2$ .

c) En déduire que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

d) Montrer sans calcul que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .

2. a) Donner les valeurs propres de  $f$ , puis en déduire que  $f$  est diagonalisable.

b) Déterminer les sous-espaces propres de  $f$ .

3. a) Justifier l'existence d'une matrice  $P$  inversible dont la première ligne ne contient que des

1 telle que  $A = P D P^{-1}$ , où  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ .

b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P D^n P^{-1}$

4. a) Déterminer la matrice  $P^{-1}$ .

b) En déduire explicitement, en fonction de  $n$ , la matrice  $A^n$ .

c) On dit qu'une suite de matrices  $(M_n)$  tend vers la matrice  $M$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , si chaque coefficient de  $M_n$  tend vers le coefficient situé à la même place dans  $M$ .

On pose  $B = \frac{1}{12}A$ . Montrer que la suite  $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers une matrice  $J$  vérifiant  $J^2 = J$ .

## Exercice 3

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance  $n$  fois une pièce équilibrée (cest-à-dire donnant pile avec la probabilité  $1/2$  et face également avec la probabilité  $1/2$ ), les lancers étant supposés indépendants.

On note  $Z$  la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces  $n$  lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble  $Z(\Omega)$

b) Pour tout  $k$  de  $Z(\Omega)$ , calculer  $P(Z = k)$ . On distinguera les cas  $k = 0$  et  $k \geq 1$ .

c) Vérifier que  $\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$ .

d) On rappelle que l'instruction `random(2)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier  $n$  étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
Program EDHEC2004 ;
var k, n, z, lancer : integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(n) ; k := 0 ; z := 0 ;
Repeat
k := k + 1 ; lancer := random(2) ;
If (lancer = 1) then ..... ;
until (lancer = 1) or (.....) ;
Writeln (z) ;
end.
```

On dispose de  $n+1$  urnes  $U_0, U_1, \dots, U_n$  telles que pour tout  $k$  de  $\{0, 1, \dots, n\}$  l'urne  $U_k$  contient  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable  $Z$  prend la valeur  $k$  (avec  $k \geq 1$ ), alors on tire une par une et avec remise,  $k$  boules dans l'urne  $U_k$  et l'on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable  $Z$  a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et  $X$  prend la valeur 0.

2. Déterminer  $X(\Omega)$ .
3. a) Déterminer, en distinguant les cas  $i = 0$  et  $1 \leq i \leq n$ , la probabilité  $P_{Z=0}(X = i)$ .  
 b) Déterminer, en distinguant les cas  $i = n$  et  $0 \leq i \leq n - 1$ , la probabilité  $P_{Z=n}(X = i)$ .  
 c) Pour tout  $k$  de  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$  déterminer, en distinguant les cas  $0 \leq i \leq k$  et  $k < i \leq n$ , la probabilité conditionnelle  $P_{Z=k}(X = i)$ .
4. a) Montrer que  $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$   
 b) Montrer que  $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$   
 c) Exprimer, pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ ,  $P(X = i)$  sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.
5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que  $\sum_{i=0}^n P(X = i) = 1$ .

## Problème

Dans ce problème, la lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}}$  si  $x \neq 0$  et  $f_n(0) = 0$ .

On note  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a) Montrer que  $f_n$  est continue à droite en 0.  
 b) Montrer que  $f_n$  est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de  $f_n$ .
2. a) Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ .  
 Pour tout réel  $x$  non nul, calculer  $f'_n(x)$  puis étudier son signe.  
 b) Calculer les limites de  $f_n$  en  $+\infty$ ,  $-\infty$  et  $0^-$ , puis donner le tableau de variations de  $f_n$ .
3. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de  $e^u$  lorsque  $u$  est au voisinage de 0.  
 b) En déduire que, lorsque  $x$  est au voisinage de  $+\infty$  ou au voisinage de  $-\infty$ , on a :  $f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$   
 c) En déduire qu'au voisinage de  $+\infty$ , ainsi qu'au voisinage de  $-\infty$ ,  $C_n$  admet une asymptote oblique  $D_n$  dont on donnera une équation. Préciser la position relative de  $D_n$  et  $C_n$  aux voisinages de  $+\infty$  et de  $-\infty$   
 d) Donner l'allure de la courbe  $(C_1)$ .
4. a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera  $u_n$ , tel que  $f_n(u_n) = 1$ .

- b) Vérifier que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est strictement supérieur à 1 et que  $u_n$  est solution de l'équation  $x \ln(x) = n$ .
- c) Étudier la fonction  $g$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(x) = x \ln(x)$ . En déduire, en utilisant la fonction  $g^{-1}$ , que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- d) Justifier la relation  $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$ , puis montrer que  $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ .

En déduire un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

5. a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante.

b) Montrer que :  $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$ .

6. On pose  $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt$ .

a) Montrer que :  $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$ .

- b) En déduire un équivalent de  $I_n$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

- c) Montrer alors que la série de terme général  $I_n$  est divergente.