Corrigé EDHEC 2005 Option économique par Pierre Veuillez

Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille(J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)I$ où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. f est définie pour tout matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et f est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   N.B. Comme $f(M)$ est définie à partir des coefficients de la matrice M, pour calculer $f(\alpha M + \beta N)$ il faut d'abord calculer les coefficients.$\alpha M + \beta N$.

   Pour toutes matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β de $\mathbb{R}$ on a :

   $\alpha M + \beta N = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha c + \beta c' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}$

   donc

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= \alpha M + \beta N + (\alpha a + \beta a' + \alpha d + \beta d')I \\ &= \alpha M + (\alpha a + \alpha d)I + \beta N + (\beta a' + \beta d')I \\ &= \alpha[M + (a+d)I] + \beta[N + (a'+d')I] \\ &= \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

2. a) $f(J_1) = J_1 + 1I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J_1 + J_4$

   $f(J_2) = J_2 + 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2$

   $f(J_3) = J_3 + 0I = J_3$

   $f(J_4) = J_4 + 1I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J_1 + 2J_4$

   b) On a donc les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{C} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$

   Les coordonnée de $f(J_1)$ sont $(2,0,0,1)$, celle de $f(J_2)$ sont $(0,1,0,0)$ celles de $f(J_3)$ sont $(0,0,1,0)$ et enfin celle de $f(J_4)$ sont $(1,0,0,2)$

   Donc la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   c) Comme sa matrice dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est symétrique, f est alors diagonalisable.

3. a) On montre que la famille $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est libre :

   Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

Si $x\,(J_1 - J_4) + y\,J_2 + z\,J_3 + t\,I = 0$ alors $\begin{pmatrix} x+t & y \\ z & -x+t \end{pmatrix} = 0$

D'où $y = z = 0$

et de $x + t = 0$ et $x - t = 0$ en additionnant on tire $x = 0$ et $t = 0$

Donc la famille $\mathcal{B} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est libre dans un espace vetoriel de dimension 4,

Conclusion : $\boxed{\text{C'est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

b) On calcule le images puis leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$:

$f\,(J_1 - J_4) = f\,(J_1) - f\,(J_4) = 2J_1 + J_4 - J_1 - 2J_4 = J_1 - J_4$ (coordonnées $(1, 0, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$)

$f\,(J_2) = J_2$ (coordonnées $(0, 1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$)

$f\,(J_3) = J_3$ (coordonénes $(0, 0, 1, 0)$ dans $\mathcal{B}$)

$f\,(I) = I + 2I = 3I$ (coordonnée $(0, 0, 0, 3)$ dans $\mathcal{B}$)

Donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$, matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$:

Comme $I = J_1 + J_4$ on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La formule de changement de base donne alors $\text{mat}_C\,(f) = \text{mat}_C\mathcal{B} \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}} f \cdot \text{mat}_C\mathcal{B}$ donc

Conclusion : $\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$

4. a) On calcule P^{-1} par le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_1 + L_4 \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_4/2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4/2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Par récurrence :

- Pour $n = 0$ on a $P\,D^0 P^{-1} = I = A^0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P\,D^n P^{-1}$
  alors $A^{n+1} = AA^n = P\,DP^{-1}P\,D^{n+1}P^{-1} = P\,D^{n+1}P^{-1}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ A^n = P\,D^n P^{-1}}$

c) Comme la matrice D est triangulaire, on a directement ses puissance et

$$\begin{aligned}
A^n &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3^n/2 & 0 & 0 & 3^n/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+3^n}{2} & 0 & 0 & \frac{-1+3^n}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+3^n}{2} & 0 & 0 & \frac{1+3^n}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x\, e^{x\left(y^2+1\right)}$

1. La fonction $(x,y) \to y$ est de classe C^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $y \to y^2+1$ est de calsse C^2 sur $\mathbb{R}$ donc $(x,y) \to y^2+1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée.

   $(x,y) \to x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ donc $(x,y) \to x\,(y^2+1)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (comme produit)

   et de même pour f.

2. a) On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x\left(y^2+1\right)} + x e^{x\left(y^2+1\right)}\left(y^2+1\right) = \left(x\left(y^2+1\right)+1\right) e^{x\left(y^2+1\right)} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\, e^{x\left(y^2+1\right)} x 2y = 2x^2 y e^{x\left(y^2+1\right)}
\end{aligned}$$

   b) Donc sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, **si** f a un extremum local **alors** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ donc $2x^2y = 0$ et $x\,(y^2+1)+1 = 0$
   Donc $y = 0$ et $x = -1$ ou bien $x = 0$, mais alors $x\,(y^2+1)+1 \neq 0$
   Donc $y = 0$ et $x = -1$
   Conclusion : $\boxed{\text{le seul point en lequel } f \text{ peu présenter un extremum local est } A = (-1,0)}$

3. a) On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \left(y^2+1\right) e^{x\left(y^2+1\right)} + \left(x\left(y^2+1\right)+1\right) e^{x\left(y^2+1\right)}\left(y^2+1\right) \\
&= \left(y^2+1\right) e^{x\left(y^2+1\right)} + \left(x\left(y^2+1\right)+1\right) e^{x\left(y^2+1\right)}\left(y^2+1\right) \\
&= \left(y^2+1\right) e^{x\left(y^2+1\right)}\left(x\left(y^2+1\right)+2\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 2y\, x\, e^{x\left(y^2+1\right)} + \left(x\left(y^2+1\right)+1\right) e^{x\left(y^2+1\right)} x 2y \\
&= 2y\, x\, e^{x\left(y^2+1\right)}\left(x\left(y^2+1\right)+2\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2x^2 e^{x\left(y^2+1\right)} + 2x^2 y e^{x\left(y^2+1\right)} 2x\, y \\
&= 2x^2 e^{x\left(y^2+1\right)}\left(2x\, y^2+1\right)
\end{aligned}$$

b) On a alors en $A : r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = e^{-1} : s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,0) = 0 : t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) = 2e^{-1}$ et $r\,t - s^2 = 2e^{-2} > 0$ donc sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ f a un extremum local en A.

Et comme $r > 0$

Conclusion : $\boxed{\text{c'est un minimum où } f(-1,0) = -e^{-1} = -1/e}$

4. a) $f(x,y) - x\,e^x = x\left(e^{x(y^2+1)} - e^x\right)$

Comme $y^2 + 1 \geq 1$ alors

- si $x \geq 0$ alors $x(y^2+1) \geq x$ et $e^{x(y^2+1)} \geq e^x$ d'où $e^{x(y^2+1)} - e^x \geq 0$ et $x\left(e^{x(y^2+1)} - e^x\right) \geq 0$
- si $x \leq 0$ alors $x(y^2+1) \leq x$ et $e^{x(y^2+1)} \leq e^x$ d'où $e^{x(y^2+1)} - e^x \leq 0$ et $x\left(e^{x(y^2+1)} - e^x\right) \geq 0$

Donc dans tous les cas : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq x\,e^x$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = (x+1)\,e^x$ donc g est décroissante sur $]-\infty,-1]$, minimum en -1 où elle vaut $-1/e$ et croissante sur $[-1,+\infty[$.

Donc pour tout réels $(x,y) : f(x,y) \geq g(x) \geq g(-1) = -1/e$

Donc le minimum local est bien un minimum global de f.

Question subsidiaire : peut-on être strict ?

Pour tout $x \neq -1,\ g(x) > g(-1)$ donc si $x \neq -1,\ f(x,y) > -1/e$

Et pour $x = -1$ on a $f(-1,y) = -e^{y^2+1} > -1/e$ si $y \neq 0$

Donc le minimum de f est un minimum strict.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \notin [0,1[\end{cases}$

a) Pour tout x de $[0,1[$, f est continue sur $[0,x]$ et

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^x a(1-t)^{a-1}\,dt = \left[-(1-t)^a\right]_0^x \\ &= 1 - (1-x)^a \end{aligned}$$

b) Comme $a > 0$ alors $t^a \to 0$ quand $t \to 0$ et $1 - (1-x)^a \to 1$ quand $x \to 1$

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ est une intégrale convergente et vaut 1.

(elle n'était impropre que pour $a - 1 < 0$, sinon, c'était une intégrale de fonction continue par morceaux)

c) Comme f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sauf en 0 et 1 et que $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$ alors f est une densité de porbabiltié.

On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_{-\infty}^x f$

- si $x \leq 0 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$
- si $x \in [0,1[: F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{x} a(1-t)^{a-1}\,dt = [-(1-t)^a]_0^x = 1-(1-x)^a$
- si $x \geq 1 : F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} a(1-t)^{a-1}\,dt + \int_{1}^{x} 0 = 1$

Conclusion : $\boxed{F(x) = 0 \text{ si } x < 0,\ 1-(1-x)^a \text{ si } x \in [0,1[\text{ et } 1 \text{ si } x \geq 1}$

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $G(x) = \mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}(-\ln(1-X) \leq x)$ que l'on résout:

$$\begin{aligned} -\ln(1-X) \leq x &\iff \ln(1-X) \geq -x \\ &\iff 1-X \geq e^{-x} \\ &\iff X \leq 1-e^{-x} \end{aligned}$$

Donc $G(x) = F(1-e^{-x})$

- pour $x \geq 0$ alors $0 \leq 1-e^{-x} < 1$ et $F(1-e^{-x}) = 1-(1-(1-e^{-x}))^a = 1-e^{-ax}$
- pour $x < 0$ on a $1-e^{-x} < 0$ donc $F(1-e^{-x}) = 0$

(Si on n'admettait aps que y est à densité, il resterait ici à vérifier la continuité de G est sa classe C^1 sauf en un nombre fini de points)

b) G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la densité de Y est $G'(x) = 0$ si $x < 0$ et $a\,e^{-ax}$ si $x \geq 0$ (valeur arbitraire en 0)

Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre a.

4. a) $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$ car $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda x}dx = 1$ (densité d'une loi exponentielle)

b) D'après le théorème de transfert, comme $t \to e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} a\,e^{-t(a+1)}dt = \frac{a}{a+1}$ (converge absolument) alors

Conclusion : $\boxed{E\left(e^{-Y}\right) = \frac{a}{a+1}}$

c) On a $Y = -\ln(1-X)$ donc $X = 1-e^{-Y}$ et X a une espérance qui est

Conclusion : $\boxed{E(X) = 1-E\left(e^{-Y}\right) = \frac{1}{a+1}}$

d) On a $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-2t}dt = \int_0^{+\infty} a\,e^{-t(a+2)}dt = \frac{a}{a+2}$ (converge absolument) donc e^{-2Y} possède une espérance et

Conclusion : $\boxed{E\left(e^{-2Y}\right) = \frac{a}{a+2}}$

Donc e^{-Y} a une variance et

$$\begin{aligned} V\left(e^{-Y}\right) &= E\left[\left(e^{-Y}\right)^2\right] - \left[E\left(e^{-Y}\right)\right]^2 \\ &= \frac{a}{a+2} - \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \\ &= \frac{a\left[(a+1)^2 - a(a+2)\right]}{(a+1)^2} \\ &= \frac{1}{(a+1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X = 1-e^{-Y} \text{ a une variance et } V(X) = (-1)^2\, V\left(e^{-Y}\right) = \frac{1}{(a+1)^2}}$

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont: 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $(T = k)$ signifie que le mobile revient en O pour la première fois à k. DOnc qu'il y est à k et qu'il n'y était pas avant :

   Conclusion : $\boxed{(T = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i \neq 0) \cap (X_k = 0)}$

   b) Comme il est au point d'abscisse 0 à l'instant 0, il passera en 1 avec une proabilité p et reviendra (restera) en 0 avec une proabilité $1-p$
   Donc $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ $\mathrm{P}(X_1 = 0) = 1 - p$ et $\mathrm{P}(X_1 = 1) = p$
   (X_1 suit une loi d eBernouilli de paramêtre $1-p$)

   c) En déduire ?????
   Les X_i ne sont pas indépendants, mais on a (probabilités composées)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T = k) &= \mathrm{P}(X_1 \neq 0)\, \mathrm{P}_{X_1 \neq 0}(X_2 \neq 0) \ldots \mathrm{P}_{X_{k-1} \neq 0}(X_k = 0) \\
&= p \cdot p \ldots (1-p) \\
&= p^{k-1} p
\end{aligned}$$

   car lorsqu'il n'est pas en O, il y revient avec la probabilité $(1-p)$ et il n'y revient pas (avance d'une case) avec la probailité p.

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } T \text{ suit une loi géométrique de paramêtre } 1-p}$

2. a) On a vu que $X_0(\Omega) = \{0\}$ et $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$
   Soit $n \geq 1$ tel que $X_n(\Omega) = [[0, n]]$
   Les valeurs possibles de X_n vont de 0 à n. Comme l'abscisse du point peut augmenter de 1, X_{n+1} peut prendre toutes les valeurs de $[[1, n+1]]$.
   Et comme il peut également revenir à l'origine, $X_{n+1}(\Omega) = [[0, n+1]]$
   Donc, par récuurrence, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [[0, n]]$

   b) On applique la formule des probabiltiés totaels avec le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_n=0) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X_{n-1}=k)\,\mathrm{P}_{X_{n-1}=k}(X_n=0)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\,\mathrm{P}(X_{n-1}=k)\\
&= (1-p)\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X_{n-1}=k)\\
&= 1-p
\end{aligned}$$

car la probilité de revenir en O est $(1-p)$ et que $(X_{n-1}=k)_{0\leq k\leq n-1}$ est un système complet d'événements.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X_n=0)=1-p}$

3. a) Comme il ne peut avancer que d'un à chaque étape, pour être en k à l'instant $n+1$, le point devait être en $k-1$ à l'instant précédent.

Donc $(X_{n+1}=k)=(X_n=k-1)\cap(X_{n+1}=k)$

Et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1}=k) &= \mathrm{P}(X_n=k-1)\,\mathrm{P}_{X_n=k-1}(X_{n+1}=k)\\
&= p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)
\end{aligned}$$

car la probabilité d'avancer d'un est p

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{1,2,\dots n+1\},\ \mathrm{P}(X_{n+1}=k)=p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)}$

b) Par récurrence :

- Pour $n=1$, et pour $k=0$ on a $\mathrm{P}(X_1=0)=1-p=p^0(1-p)$
- Soit $n\geq 1$ tel que $\forall k\in\{0,1,2\dots,n-1\}$, $\mathrm{P}(X_n=k)=p^k(1-p)$.
  Comme $\forall k\in\{1,2,\dots n+1\}:\mathrm{P}(X_{n+1}=k)=p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)$ alors pour $k-1\in\{0,1,2\dots,n-1\}$,
  donc pour $k\in[[0,n]]:\ \mathrm{P}(X_{n+1}=k)=p\,p^{k-1}(1-p)=p^k(1-p)$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in\{0,1,2\dots,n-1\},\ \mathrm{P}(X_n=k)=p^k(1-p)}$

et on a $\mathrm{P}(X_{n+1}=n+1)=p.\mathrm{P}(X_n=n)$

En effet, pour être en n à l'instant n, il doit avoir avancé d'un à chaque étape, ceci avec une probabiltié de p.

Donc la suite $(\mathrm{P}(X_n=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison p et de premier terme $\mathrm{P}(X_0=0)=1$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}:\mathrm{P}(X_n=n)=p^n\cdot 1}$

c) Pour calculer la somme, on doit distinguer la valeur $k=n$ et les autres :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X_n=k) &= \mathrm{P}(X_n=n)+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X_n=k)\\
&= p^n+\sum_{k=0}^{n-1}p^k(1-p)\\
&= p^n+(1-p)\frac{1-p^n}{1-p}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Ce calcul (découpage de $\sum$) n'étant valable que pour $n-1 \geq 0$ donc pour $n \geq 1$
pour $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} \mathrm{P}\left(X_0=k\right)=1$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p=\dfrac{1}{3}$.

   On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0,1,2\}$.

   Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

   Ici, on a une chance sur trois$=p$ pour que `u` prenne la valeur 2.

   L'abscisse est stockée dans `X`

   Donc quand `u=3` le mobile avance d'un (`X:=X+1`)et sinon, il revient à l'origine (`X:=0`)

   `n` est l'indice n.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
    Readln(n) ;
    Randomize ;
    X:=0;
    For k:=1 to n do
    begin
        u := random(3) ;
        if (u = 2) then X := X+1;
            else X := 0;
        end ;
    Writeln (X) ;
end.
```

5. a) Les trois méthodes classiques pour obtenir ce résultat sont :

   - par récurrence sur n (le plus naturel puisque le résultat est donné)
   - en dérivant la fonction $x \rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} x$
     $f(x)=\sum_{k=1}^{n-1} x^k$ est dérivbale sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\sum_{k=1}^{n-1} k\, x^{k-1}$
     Et comme, pour $x \neq 1$, $f(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$ alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}(1-x)+(1-x^n)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

   et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\, x^{k-1}=\frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$ pour tout $x \neq 1$.

- en développant $(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1}$:

$$\begin{aligned}
(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \sum_{h=0}^{n-2} (h+1)\ p^{h} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \sum_{h=0}^{n-2} p^{h} + \sum_{h=0}^{n-2} h\,p^{h} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \frac{1-p^{n-1}}{1-p} + 0 - (n-1)\,p^{n-1} \text{ car p} \neq 1 \\
&= \frac{1-p^{n-1}-(1-p)\,(n-1)\,p^{n-1}}{1-p} \\
&= \frac{1-n\,p^{n-1}+(n-1)\,p^{n}}{1-p}
\end{aligned}$$

et donc $(1-p\neq 0)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{1-n\,p^{n-1}+(n-1)\,p^{n}}{(1-p)^2}$$

b) On calcule l'espérance en traitant à part les valeurs $k=0$ et : n : (pour $n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
E\,(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{P}\,(X=k) = 0\,\mathrm{P}\,(X=0) + n\,\mathrm{P}\,(X=n) + \sum_{k=1}^{n-1} k\,\mathrm{P}\,(X=k) \\
&= n\,p^{n} + \sum_{k=0}^{n-1} k\,(1-p)\,p^{k} \text{ on fait réapparaître l'expresssion précédente} \\
&= n\,p^{n} + (1-p)\,p \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} \\
&= n\,p^{n} + (1-p)\,p \frac{1-n\,p^{n-1}+(n-1)\,p^{n}}{(1-p)^2} \\
&= p\frac{n\ p^{n-1}\,(1-p)+1-n\ p^{n-1}+(n-1)\,p^{n}}{1-p} \\
&= p\frac{1-p^{n}}{1-p}
\end{aligned}$$

formule qui est égalment valable pour $n=0$ et $n=1$.

6. a) On a $\mathrm{P}\,(X_{n+1}=k) = p\mathrm{P}\,(X_{n}=k-1)$ pour $k \in [[1,n+1]]$
D'près le théorème de transfert,

$$
\begin{aligned}
E\left(X_{n+1}^2\right) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \mathrm{P}\left(X_{n+1}=k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 p \mathrm{P}\left(X_n=k-1\right)\\
&= p\sum_{h=-1}^{n} (h+1)^2 p \mathrm{P}\left(X_n\right)\\
&= p\sum_{h=0}^{n} \left(h^2+2h+1\right) p \mathrm{P}\left(X_n\right)+0\\
&= p\left(\sum_{h=0}^{n} h^2 p \mathrm{P}\left(X_n\right)+2\sum_{h=0}^{n} h p \mathrm{P}\left(X_n\right)+\sum_{h=0}^{n} p \mathrm{P}\left(X_n\right)\right)\\
&= p\left(E\left(X_n^2\right)+2E\left(X_n\right)+1\right)
\end{aligned}
$$

b) Avec $u_n = E\left(X_n^2\right)+(2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$, on a :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= E\left(X_{n+1}^2\right)+(2(n+1)-1)\frac{p^{n+2}}{1-p}\\
&= p\left(E\left(X_n^2\right)+2E\left(X_n\right)+1\right)+(2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}\\
&= pE\left(X_n^2\right)+2p^2\frac{1-p^n}{1-p}+p+(2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}\\
&= pE\left(X_n^2\right)+p^2\frac{2\left(1-p^n\right)+(2n+1)p^n}{1-p}+p\\
&= pE\left(X_n^2\right)+p^2\frac{2+(2n-1)p^n}{1-p}+p\\
&= pE\left(X_n^2\right)+\frac{p^2+p+(2n-1)p^{n+2}}{1-p}
\end{aligned}
$$

en remplaçant $E\left(X_n\right)$ par sa valeur.

Et en partant du second membre :

$$
\begin{aligned}
p\,u_n+\frac{p(1+p)}{1-p} &= p\left(E\left(X_n^2\right)+(2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}\right)+\frac{p(1+p)}{1-p}\\
&= p\,E\left(X_n^2\right)+\frac{p^2+p+(2n-1)p^{n+2}}{1-p}\\
&= u_{n+1}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{u_{n+1} = p\,u_n+\dfrac{p(1+p)}{1-p}}$

c) La suite u est donc arithmético-géométrique.

On détermine c tel que $c = p\,c+\frac{p(1+p)}{1-p} \iff c(1-p) = \frac{p(1+p)}{1-p} \iff c = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$

Et soit $v_n = u_n - c$ pour tout n entier.

On a alors $v_{n+1} = u_{n+1}-c = p\,u_n+\frac{p(1+p)}{1-p}-\left(p\,c+\frac{p(1+p)}{1-p}\right) = p\,v_n$

Et la suite v est géométrique de raison p et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$
avec $u_0 = E\left(X_0^2\right) + -\frac{p}{1-p} = -\frac{p}{1-p}$ donc $v_0 = -\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p}{(1-p)^2}$
$v_n = \dfrac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2}$ et $u_n = v_n + c = \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p^{n+1}+p(1+p)}{(1-p)^2}$
Et comme

$$\begin{aligned}
E\left(X_n^2\right) &= u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p) - (1-p)(2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

d) On développe le calcul de la variance :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E\left(X_n^2\right) - E(X_n)^2 \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - p^2\frac{(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p) - p^2\left(1-2p^n+p^{2n}\right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p}{(1-p^2)}\left[(-2n-1+p(2n-1))p^n + 1 + p - p\left(1-2p^n+p^{2n}\right)\right] \\
&= \frac{p}{(1-p^2)}\left[(-2n-1+p(2n+1))p^n + 1 - p^{2n+1}\right] \\
&= \frac{p}{(1-p^2)}\left[1 + (2n+1)(-1+p)p^n - p^{2n+1}\right]
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.