Corrigé EDHEC 2006 Eco par Pierre Veuillez

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u=(2,1,-2)$.

1. a) $(x,y,z)\in\ker(f)\iff f(u)=0\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$

   (car les coordonnées de (x,y,z) dans la base canonique sont (x,y,z))

   ce que l'on résout :

   $\iff\begin{cases} 2x+10y+7z=0 & L_1-2L_2 \\ x+4y+3z=0 \\ -2x-8y-6z=0 & L_3+2L_2 \end{cases}$

   $\iff\begin{cases} 2y+z=0 \\ x+4y+3z=0 \\ 0=0 \end{cases}$ que l'on paramètre par y pour avoir $(?,1,?)$ dans le générateur de la solution.

   $\iff\begin{cases} z=-2y \\ x=+2y \end{cases}$

   Conclusion : $\boxed{\ker(f)=\{y(2,1,-2)\,/y\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}(u)}$

   b) Comme $\ker(f)\neq\emptyset$ alors A est non inversible. (on peut aussi en déduire que 0 est valeur propre)

2. a) Soit $v=(x,1,z)$ qui a pour coordonnées dans $\mathcal{B}$: $(x,1,z)$

   $f(v)=u\iff A\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\iff\begin{cases} 2x+10+7z=2 \\ x+4+3z=1 \\ -2x-8-6z=-2 & L_3+L_1 \end{cases}$

   $\iff\begin{cases} 2x+10+7z=2 \\ x+4+3z=1 \\ 2+z=0 & L_3+L_1 \end{cases}\iff\begin{cases} x=3 \\ x=3 & \text{par substitution} \\ z=-2 \end{cases}$

   L'unique vecteur v vérifiant $f(v)=u$ est donc :

   Conclusion : $\boxed{v=(3,1,-2)}$

   b) Soit $w=(x,1,z)$On traduit sur les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

   $f(w)=v\iff A\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\iff\begin{cases} 2x+10+7z=3 \\ x+4+3z=1 \\ -2x-8-6z=-2 & L_3+L_1 \end{cases}$

   $\iff\begin{cases} 2x+10+7z=3 \\ x+4+3z=1 \\ 2+z=1 & L_3+L_1 \end{cases}\iff\begin{cases} x=0 \\ x=0 \\ z=-1 \end{cases}$

   Donc l'unique w est

   Conclusion : $\boxed{w=(0,1,-1)}$

c) La famille (u,v,w) comprend trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Il suffit donc de démontrer que la famille est libre :

Si $xu+yv+zw=0$ alors $x\,(2,1,-2)+y\,(3,1,-2)+z\,(0,1,-1)=0$

donc $\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y=0 & L_1-2L_2 \\ x+y+z=0 & \\ -2x-2y-z=0 & L_3+2L_2 \end{array}\right.$

et $\left\{\begin{array}{l} y-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ et $x=y=z=0$ par substitution.

Donc la famille est libre.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}'=(u,v,w) \text{ est nue base de } \mathbb{R}^3}$

La matrice de passage de la base canonique dans $\mathcal{B}'$ est formé par les coordonnées en colonne des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

donc $P=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. a) Comme $f\,(u)=0=0u+0v+0w$ alors les coordonnées de $f\,(u)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(0,0,0)$

et de même $f\,(v)=u$ a pour coordonnées $(1,0,0)$ et $f\,(w)=v$ a pour coordonnées $(0,1,0)$

Donc $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

N est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur la diagonale : il n'y a que 0.

Conclusion : $\boxed{\text{la seule valeur propre de } f \text{ est } 0}$.

Si f était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait la matrice nulle. Donc f serait nulle. ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

b) La formule de changement de base donne :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}f=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\left(f\right)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{B}\right)\text{ et}$$

Conclusion : $\boxed{A=P\,N\,P^{-1}}$

On calcule $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3=0$

Donc pour tout $k\geq 3$, $N^k=N^3N^{k-3}=0$ et $A^k=P\,N^kP^{-1}=0$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à 3, on a : } A^k=0.}$

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).

(ce sont les matrices M qui vérifient $M\,C=C\,M$)

a) On peut vérifier les critères de sous espaces :

- $0\,N=0=N\,0$ donc $O\in C_N$
- Soient α et $\beta\in\mathbb{R}$ et M et M' de C_N alors
$(\alpha M+\beta M')\,N=\alpha MN+\beta M'N=\alpha NM+\beta NM'=N\,(\alpha M+\beta M')$
Donc C_N est stable par combinaisons linéaires et est un sous espace de $\mathcal{M}_3$.

Conclusion : $\boxed{C_N \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3}$

Ou plus rapidement, résoudre et trouver une famille génératrice :

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ alors

$NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$M\,N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$

Donc $M\,N = N\,M \iff \begin{cases} d = 0 & e = a \quad f = b \\ g = 0 & h = d \quad e = i \\ 0 = 0 & g = 0 \quad h = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 & e = a \quad f = b \\ g = 0 & h = 0 \quad e = i \\ 0 = 0 & g = 0 \quad h = 0 \end{cases}$

Donc $C_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\,(I, N, N^2)$

Et on peut conclure à la fois que

Conclusion : $\boxed{C_N \text{ est le sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3 \text{ engendré par } (I, N, N^2)}$

b) On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff M\,A = A\,M \\ &\iff P^{-1}MP\,P^{-1}AP = P^{-1}AP\,P^{-1}\,MP \\ &\iff P^{-1}MP\,N = NP^{-1}MP \\ &\iff P^{-1}MP \in C_N \end{aligned}$$

Pour déterminer l'ensemble, on procède par équivalence :

$M \in C_A \iff$ il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P^{-1}MP = aI + bN + cN^2$

$\iff$ il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $M = aI + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1}$

$\iff$ il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $M = aI + bA + cA^2$

$\iff M \in \text{Vect}\,(I, A, A^2)$

Pour avoir la dimension, reste à voire si la famille est libre :*

Au lieu de la traiter directement, on réutilise N :

Si $aI + bA + cA^2 = 0$ alors (en multipliant par P^{-1} à droite et par P à gauche) $aI + bN + cN^2 = 0$.

Et comme la famille (I, N, N^2) est échelonnée, elle est libre.

Donc $a = b = c = 0$

et (I, A, A^2) est libre et génératrice donc base de C_A.

Conclusion : $\boxed{C_A = \text{vect}(I, A, A^2) \text{ et } \dim(C_A) = 3}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in [0, \dfrac{1}{2}[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [\dfrac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. On vérifie les critères d'une densité de probabilité :

   - f est positive ou nulle.
   - f est continue sur $\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est impropre en $\pm\infty$:
     $\int_{-\infty}^{0} f=\int_{-\infty}^{0} 0=0$ et $\int_{1}^{+\infty} f=0$
     $\int_{0}^{1/2} f=\int_{0}^{1/2} \frac{1}{2(1-x)^2}dx=\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}\right]_0^{1/2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
     $\int_{1/2}^{1} f=\int_{1/2}^{1} \frac{1}{2x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\frac{-1}{x}\right]_{1/2}^{1}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$
     $\int_{1}^{+\infty} f=0$
     Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

   Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et admettant la fonction f pour densité.

2. Pour tout x réel, on a $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f$

   - si $x<0$: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0=0$
   - si $0\leq x<\frac{1}{2}$: $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0+\int_{0}^{x} \frac{1}{2(1-t)^2}dt=\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\right]_0^{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)=\frac{1}{2}\frac{x}{1-x}$
   - si $\frac{1}{2}\leq x<1$: $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0+\int_{0}^{1/2} \frac{1}{2(1-t)^2}dt+\int_{1/2}^{x} \frac{1}{2t^2}dt=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}\frac{-1}{t}\right]_{1/2}^{x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}$
   - si $x\geq 1$: $F(x)=1$

3. On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ impropre en $\pm\infty$:

   - $\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} 0=0$
   - $\int_{0}^{1/2} tf(t)\,dt=\int_{0}^{1/2} \frac{t}{2(1-t)^2}dt=???$
     Une indication aurait du être donnée !
     on peut au choix,
     - faire un changement de variable $x=1-t$ (ou plutôt $t=1-x$)
     - faire apparaître $1-t$ au numérateur, pour simplifier:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2}\frac{t}{2(1-t)^2}dt &= \int_0^{1/2}\frac{-(1-t)+1}{2(1-t)^2}dt\\
&= \int_0^{1/2}\frac{-1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1-t)^2}dt\\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(1-t)+\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\right]_0^{1/2}\\
&= \frac{1}{2}\ln(1/2)+1-\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

   - $\int_{1/2}^{1} tf(t)\,dt=\int_{1/2}^{1} \frac{t}{2t^2}dt=\left[\frac{1}{2}\ln(t)\right]_{1/2}^{1}=\frac{1}{2}\ln(2)$

- $\int_1^{+\infty} tf(t)\,dt = 0$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge et X a une espérance

Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance et } E(X) = \frac{1}{2}}$

4. a) Par le théorème de transfert, on étudie l'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt$ impropre en $\pm\infty$
   Ce qui équivaut ici à la convergence simple car $(t-1)^2$ est de signe constant au voisinage de $\pm\infty$.
   - $\int_{-\infty}^{0} \left|(t-1)^2 f(t)\right| dt = \int_{-\infty}^{0} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$
   - $\int_0^{1/2} \left|(t-1)^2 f(t)\right| dt = \int_0^{1/2} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_0^{1/2} \frac{(t-1)^2}{2(1-t)^2} dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}$
   - sur $[1/2, 1]$ il faut développer :

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{1} \left|(t-1)^2 f(t)\right| dt &= \int_{1/2}^{1} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_{1/2}^{1} \frac{t^2-2t+1}{2t^2} dt \\
&= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t - \ln(t) - \frac{1}{2t}\right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ln(2) + 1 \\
&= \frac{3}{4} - \ln(2)
\end{aligned}$$

   - $\int_1^{+\infty} \left|(t-1)^2 f(t)\right| dt = \int_1^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt = 0$

   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt$ converge absolument donc $(X-1)^2$ a une espérance et

$$\mathbf{E}\left((X-1)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt = 1 - \ln(2)$$

   Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}\left((X-1)^2\right) = 1 - \ln(2)}$

   b) On a alors $X^2 = (X-1)^2 + 2X - 1$
   Donc X^2 a une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \mathbf{E}\left((X-1)^2\right) + 2\mathbf{E}(X) - 1 \\
&= 1 - \ln(2) + 1 - 1 \\
&= 1 - \ln(2)
\end{aligned}$$

   Donc X a une variance et $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{3}{4} - \ln 2.$

   Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance et } \mathbf{V}(X) = \frac{3}{4} - \ln 2.}$

5. On appelle variable indicatrice d'un événement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

   On considère maintenant la variable aléatoire Y, indicatrice de l'événement $(X \leq \frac{1}{2})$ et la variable aléatoire Z, indicatrice de l'événement $(X > \frac{1}{2})$.

a) On a $Y=1$ quand $Z=0$ et $Y=0$ quand $Z=1$.
On a donc $Y=1-Z$
Comme Y est fonction affine de Z alors le coefficient de corrélation linéaire vaut ± 1
Et comme le coefficient directeur es négatif, alors $\rho\left(Y,Z\right)=-1$

b) D'autre part, le coefficient de corrélation linéaire est $\rho(Y,Z)=\frac{\mathrm{cov}(Y,Z)}{\sigma(Y)\sigma(Z)}$
Donc $\mathrm{cov}\left(Y,Z\right)=-\sigma\left(Y\right)\sigma\left(Z\right)$
Et comme $V\left(Y\right)=\left(-1\right)^2 V\left(Z\right)$, alors $\sigma\left(Y\right)=\sigma\left(Z\right)=\sqrt{V\left(Y\right)}$
On a $\mathrm{P}\left(Y=1\right)=\mathrm{P}\left(X\leq\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$
Donc $Y\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $V\left(Y\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ donc $\sigma\left(Y\right)=\frac{1}{2}$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{ov}\left(Y,Z\right)=-\frac{1}{4}}$

Exercice 3
Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y)=2x^2+2y^2+2xy-x-y$.

1. a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right) &= 4x+2y-1\\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right) &= 4y+2x-1\end{aligned}$$

b) (x,y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0\end{cases}$ ce que l'on résout :

$$\iff\begin{cases}4x+2y-1=0 & L_1-2L_2\\ 2x+4y-1=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}-6y+1=0\\ 2x+4y-1=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=1/6\\ x=1/6\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc le seul point critique de} f \text{est } A=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right).}$

2. a) f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)=4\\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x,y\right)=2\\ t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x,y\right)=4\end{aligned}$$

b) En $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ on a $rt-s^2=16-2=14>0$ et $r>0$
Donc sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, le point critique $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ est un minimum local
$m=f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=2\frac{1}{36}+2\frac{1}{36}+2\frac{1}{36}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{-1}{6}$
Conclusion : $\boxed{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)\text{ est un minimum local et la valeur en ce minimum est }-\frac{1}{6}}$

3. a) Pour développer $\left(a+b+c\right)^2$, on regroupe :

$$\begin{aligned}\left(a+\left(b+c\right)^2\right)^2 &= a^2+2a\left(b+c\right)+\left(b+c\right)^2\\ &= a^2+c^2+b^2+2ab+2ac+2bc\end{aligned}$$

On a développe

$$2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2 = 2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{16}+xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(y^2-\frac{y}{3}+\frac{1}{36}\right)$$
$$= 2x^2+2y^2+2xy-x-y+\frac{1}{6}$$

b) On a donc $f\left(x,y\right)=2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}$

et comme un carré est toujours positif, on a donc pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f\left(x,y\right)\geq\frac{1}{6}$

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{6} \text{ est bien un minimum global.}}$

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :
$g(x,y)=2e^{2x}+2e^{2y}+2e^{x+y}-e^x-e^y$.

a) On remarque que $g\left(x,y\right)=f\left(e^x,e^y\right)$
et comme $f\left(x,y\right)\geq\frac{-1}{6}$ pour tout couple (x,y) alors, en particulier,

Conclusion : $\boxed{\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ g\left(x,y\right)\geq-\frac{1}{6}.}$

b) Et comme $g\left(\ln\left(\frac{1}{6}\right),\ln\left(\frac{1}{6}\right)\right)=f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ alors ce minorant est est atteint.

Conclusion : $\boxed{g \text{ possède un minimum global sur } \mathbb{R}^2 \text{ en}\left(-\ln\left(6\right),-\ln\left(6\right)\right)}$

Problème

Partie 1 : étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m\in\mathbb{N}, P(X\geq m)>0$.
On suppose également que X vérifie : $\forall(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, P_{(X\geq m)}(X\geq n+m)=P(X\geq n)$. On pose $P(X=0)=p$ et on suppose que $p>0$.
(N.B. dans le cours, il est dit qu'une telle variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$est sans mémoire suit une loi géométrique
Ici, les valeurs sont prises dans $\mathbb{N}$ et le théorème ne s'applique donc pas)

1. Comme les valeurs de X sont entières, $\overline{X\geq 1}=(X=0)$

Donc $\mathrm{P}\left(X\geq 1\right)=1-\mathrm{P}\left(X=0\right)=1-p=q>0$ par hypothèse.

Et comme $q=1-p$ et que $p>0$ alors $q<1$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X\geq 1)=q \text{ et } 0<q<1.}$

2. On revient à la définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathrm{P}_{(X\geq m)}\left(X\geq n+m\right)=\frac{\mathrm{P}\left(X\geq n+m\right)}{\mathrm{P}\left(X\geq m\right)}=\mathrm{P}\left(X\geq n\right)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \forall(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \mathrm{P}\left(X\geq n+m\right)=\mathrm{P}\left(X\geq m\right)\mathrm{P}\left(X\geq n\right)}$

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n=P(X\geq n)$.

a) On a avec le couple $(n,1)$ la relation : $\mathrm{P}\left(X\geq n+1\right)=\mathrm{P}\left(X\geq 1\right)\mathrm{P}\left(X\geq n\right)$
Donc $u_{n+1}=q\cdot u_n$
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } u \text{ est géométrique de raison } q}$ géométrique.

b) On a alors $u_n = q^n u_0 = q^n \mathrm{P}(X \geq 0) = q^n$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \mathrm{P}(X \geq n) = q^n}$

c) Comme X ne prend que des valeurs entières, $(X \geq n) = (X = n) \cup (X \geq n+1)$ et comme les deux sont incompatibles $\mathrm{P}(X \geq n) = \mathrm{P}(X \geq n+1) + \mathrm{P}(X = n)$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X = n) = \mathrm{P}(X \geq n) - \mathrm{P}(X \geq n+1).}$

d) Et on trouve donc $\mathrm{P}(X = n) = q^n - q^{n+1} = q^n(1-q) = q^n p$

Conclusion : $\boxed{\text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a } \mathrm{P}(X = n) = q^n p}$

4. a) La loi de $X+1$ est donnée par :
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P}(X+1 = n) = \mathrm{P}(X = n-1) = q^{n-1}p$

Conclusion : $\boxed{X+1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$

b) Comme $\mathbf{E}(X+1) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(X+1) = \frac{q}{p^2}$
et que $X = X+1-1$ alors

Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} - 1 \text{ et } \mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}}$

Partie 2 : taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}\mathrm{P}(Y \geq n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n)$.

Remarque : en terme de durée (discrète) de fonctionnement, c'est la probabilité de tomber en panne à l'instant n $(Y = n)$, quand le système fonctionnait encore à l'instant $(Y \geq n)$. Le cas le plus classique est celui du nombre de lancer pour obtenir le premier Pile où λ_n est constant.

1. a) Par définition de la probabilité conditionnelle on a : $\lambda_n = \dfrac{\mathrm{P}(Y = n \cap Y \geq n)}{\mathrm{P}(Y \geq n)}$

et comme $[Y = n \cap Y \geq n] = (Y = n)$ on a donc

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{\mathrm{P}(Y = n)}{\mathrm{P}(Y \geq n)}.}$

b) On a alors

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_n &= 1 - \frac{\mathrm{P}(Y = n)}{\mathrm{P}(Y \geq n)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(Y \geq n) - \mathrm{P}(Y = n)}{\mathrm{P}(Y \geq n)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(Y \geq n+1)}{\mathrm{P}(Y \geq n)} \end{aligned}$$

car $(Y \geq n) = (Y = n) \cup (Y \geq n+1)$ puisque Y ne prend que des valeurs entières.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \dfrac{\mathrm{P}(Y \geq n+1)}{\mathrm{P}(Y \geq n)}}$

c) Comme $\mathrm{P}(Y \geq n) > 0$ pour tout entier n alors $1 - \lambda_n > 0$ et $\lambda_n < 1$
Mais on peut avoir $\lambda_n = 0$ (par exemple pour une loi géométrique, $\lambda_0 = 0$)

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_n < 1.}$

d) Par récurrence :

Pour $n=1$: $\prod_{k=0}^{1-1}(1-\lambda_k)=1-\lambda_0=\dfrac{\mathrm{P}(Y\geq 1)}{\mathrm{P}(Y\geq 0)}=\mathrm{P}(Y\geq 1)$ car $\mathrm{P}(Y\geq 0)=1$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}(Y\geq n)=\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$

alors $\prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k)=(1-\lambda_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)=\dfrac{\mathrm{P}(Y\geq n+1)}{\mathrm{P}(Y\geq n)}\mathrm{P}(Y\geq n)=\mathrm{P}(Y\geq n+1)$

Donc, par récurrence,

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathrm{P}(Y\geq n)=\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)}$

2. a) La probabilité du contraire est : $1-\mathrm{P}(Y\geq n)=\mathrm{P}(Y<n)$

et comme Y prend que des valeurs entières : $1-\mathrm{P}(Y\geq n)=\mathrm{P}(Y\leq n-1)$

Et comme $(Y\leq n-1)=\bigcup_{k=1}^{n-1}(Y=k)$ (incompatibles) alors

Conclusion : $\boxed{1-\mathrm{P}(Y\geq n)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(Y=k)}$

b) Comme $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ alors $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Y=k)=1$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(Y=k)=1$

et $\mathrm{P}(Y\geq n)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(Y=k)\to 0$ quand $+\infty$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to\infty}P(Y\geq n)=0.}$

c) On a vu que $\mathrm{P}(Y\geq n)=\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$

Donc $\ln(\mathrm{P}(Y\geq n))=\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1-\lambda_k)$

Et comme $\mathrm{P}(Y\geq n)\to 0$ alors $\ln(\mathrm{P}(Y\geq n))\to-\infty$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1-\lambda_k)\to-\infty$ et

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}-\ln(1-\lambda_k)=+\infty}$

d) On pense au théorème de comparaison.

On a $\ln(1+x)\sim x$ quand $x\to 0$

Mais il faudrait pour cela que $\lambda_n\to 0$ quand $n\to+\infty$. Et on a vu que dans le cas d'une loi géométrique, ce n'était pas le cas (λ_n constant)

deux cas :

- si $\lambda_n\to 0$ alors $-\ln(1-\lambda_k)\sim\lambda_k\geq 0$ et par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum_{k\geq 0}\lambda_k$ diverge également.
- Si $\lambda_n\not\to 0$ alors la série $\sum_{k\geq 0}\lambda_k$ diverge (condition nécessaire de convergence)

Conclusion : $\boxed{\text{la série des } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$

3. a) On se souvient que $n!=n(n-1)!$ si $n\geq 1$et $0!=1$

On complète donc :

```
Function f(n : integer) : integer;
Begin
If (n=0) then f:= 1
```

```
      else f:  =f(n-1)
end;
```

b) On considère la déclaration de fonction récursive suivante :

```
Function g (a:real ; n:integer):real;
Begin
If (n=0) then g:  = 1
      else g:  = a * g(a,n- 1);
end ;
```

Cela définit une suite u pour laquelle $u_n = a \cdot u_{n-1}$

Suite géométrique avec $u_0 = 1$

Conclusion : $\boxed{g\,(a,n) \text{ retourne } a^n.}$

c) Proposer un programme (sans écrire la partie déclarative) utilisant ces deux fonctions et permettant d'une part le calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ et d'autre part, à l'aide du résultat de la question 1a), le calcul et l'affichage du taux de panne à l'instant n d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $a > 0$, lorsque n et a sont entrés au clavier par l'utilisateur (on supposera $n \geq 1$).

Pour la somme, on utilise le fait que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a^k}{k!} e^{-a} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a}$.

Le taux de panne est $\lambda_n = \frac{\mathrm{P}\,(Y = n)}{\mathrm{P}\,(Y \geq n)}$ avec

- $\mathrm{P}\,(Y = n) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}$
- $\mathrm{P}\,(Y \geq n) = 1 - \mathrm{P}\,(Y < n) = 1 - \mathrm{P}\,(Y \leq n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-a} \frac{a^k}{k!}$

```
begin
S:=0;
writeln('a?n?');readln(a,n);
for k:=0 t n-1 do S:=S+g(a,k)/f(k);
S:=S*exp(-a);
writeln('somme:  ',S);
lambda=exp(-a)*g(a,n)/f(n)/(1-S);
writeln('taux de panne :  ',lambda);
end.
```

N.B. d'un point de vue nombre de calcul, il aurait été beaucoup plus léger de calculer à la fois la factorielle, la puissance, comme la somme : en utilisant la relation de récurrence, sans récursivité, comme il est fait ci-dessous.

d) Compléter la déclaration de fonction suivante pour, qu'elle renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ à l'appel de *sigma(a,n)*.

```
Function sigma(a :  real ; n :  integer) :  real;
var k :  integer;
   p:  real;
Begin
   p :  = 1 ; s:=1;
   For k:  = 1 to n-1 do begin p := p*a / k; s := S+p ; end;
```

```
    s:= S*exp(-a);
    sigma:  = s;
  end ;
```

Partie 3 : caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

1. Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 1.

   On avait $\mathrm{P}\left(X \geq n\right) = q^n$ et $\mathrm{P}\left(X = n\right) = q^n p$

   Donc $\lambda_n = \dfrac{\mathrm{P}\left(X = n\right)}{\mathrm{P}\left(X \geq n\right)} = p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Conclusion : $\boxed{\text{le taux de panne est constant égal à } p}$

2. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.

   a) Comme on est dans les hypothèses de la partie 3, on a $\lambda = \dfrac{\mathrm{P}\left(Z = n\right)}{\mathrm{P}\left(Z \geq n\right)}$

   Si $\lambda = 0$ alors $\mathrm{P}\left(Z = n\right) = 0$ pour tout entier n. (et $\sum \mathrm{P}\left(Z = n\right) \neq 1$). Donc $\lambda > 0$

   Si $\lambda = 1$ alors $\mathrm{P}\left(Z = n\right) = \mathrm{P}\left(Z \geq n\right)$ donc $\mathrm{P}\left(Z \geq n + 1\right) = 0$ ce qui contredit $\mathrm{P}\left(Z \geq n\right) > 0$ pour tout entier n.

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } 0 < \lambda < 1}$

   b) On a vu que, pour $n \geq 1$ on avait $\mathrm{P}\left(Y \geq n\right) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(1 - \lambda_k\right) = \left(1 - \lambda\right)^{n-1+1}$

   et donc $\mathrm{P}\left(Z = n\right) = \mathrm{P}\left(Z \geq n\right) - \mathrm{P}\left(Z \geq n + 1\right) = \left(1 - \lambda\right)^n - \left(1 - \lambda\right)^{n+1} = \left(1 - \lambda\right)^n \lambda$ et $\mathrm{P}\left(Z = 0\right) = 1 - \mathrm{P}\left(Z \geq 1\right) = \lambda$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{P}\left(Z = n\right) = \left(1 - \lambda\right)^n \lambda}$

   soit la même loi que X pour $p = \lambda$.

   c) Donc, si la loi est celle de X, le taux de panne est constant, et réciproquement

   Conclusion : Les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.