Exercice 1

Pour toute matrice M élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M, définie de la façon suivante : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + {}^tM$.

1. a) φ est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   De plus la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de coordonnées (a, b, c, d) dans la base $\mathcal{B}$ a pour image $\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ de coordonnées $(2a, b+c, b+c, 2d)$.

   Et comme $\begin{pmatrix} 2a \\ b+c \\ b+c \\ 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ alors φ est l'application linéaire associée à cette matrice dans la base $\mathcal{B}$. ; elle est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on récupère du même coup sa matrice dans $\mathcal{B}$.

   On pouvait dire plus classiquement :

   la transposition est linéaire donc pour tout M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β réel, ${}^t(\alpha M + \beta N) = \alpha\, {}^tM + \beta\, {}^tN$ donc $\varphi(\alpha M + \beta N) = \alpha\varphi(M) + \beta\varphi(N)$

   Si on ne se souvient pas de la linéarité de la transposition, on passe par l'écriture $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

   b) Si on n'a pas déjà la matrice de φ, on a $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1$ de coordonnées $(2, 0, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$ et de même

   $\varphi(E_2) = E_2 + E_3 : \varphi(E_3) = E_2 + E_3 : \varphi(E_4) = 2E_4$

   Donc la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   c) Comme la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est symétrique, elle est alors diagonalisable.

   Comme les colonnes 2 et 3 sont égales, elles sont liées. Donc la matrice est non inversible et φ non bijective.

2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2A$

   On a alors pour tout $n \geq 1 : A^{n+1} = A^{n-1}A^2$ (découpage pour $n - 1 \geq 0$) donc $A^{n+1} = 2A^{n-1}A = 2A^n$

   La suite $(A^n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de raison 2

   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 1 : A^n = 2^{n-1}A}$

   Une récurrence convenait aussi très bien.

3. a) $\text{Im}(\varphi)$ est engendré par $(\varphi(E_1);\varphi(E_2);\varphi(E_3);\varphi(E_4))$ et comme $\varphi(E_2)=\varphi(E_3)$ alors $\text{Im}(\varphi)=\text{Vect}(2E_1,\ E_2+E_3,\ 2E_4)=\text{Vect}(E_1,\ E_2+E_3,\ E_4)$
De plus cette famille est libre (étagée) donc c'est une base de $\text{Im}(\varphi)$ d'où
Conclusion : $\boxed{\dim(\text{Im}(\varphi))=3}$

b) Comme $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))=4$, le théorème du rang nous donne alors :
$\dim(\ker(\varphi))=4-\dim(\text{Im}(\varphi))=1$
Pour avoir une base, il suffit d'avoir un vecteur non nul de $\ker(\varphi)$.
$\varphi(E_3-E_2)=\varphi(E_3)-\varphi(E_2)$ par linéarité $=0$.
Et $E_3-E_2\in\ker(\varphi)$ et non nul
Conclusion : $\boxed{(E_2-E_3)\text{ est une base de }\ker(\varphi)}$

c) Comme $\dim(\ker(\varphi))=1$ alors 0 est valeur propre associé à ce sous espace propre.
La somme des dimensions des sous espaces propres étant au plus 4, la somme des dimensions des autres sous espaces propres est au plus 3.
Donc si $\text{Im}(\varphi)$ est inclus dans le sous espace propre $\mathcal{E}_2$ associé à la valeur propre 2, il est alors égal au sous espace propre.
On a déjà vu que $\varphi(E_1)=2E_1$ et $\varphi(E_4)=2E_4$. Enfin $\varphi(E_2+E_3)=\varphi(E_2)+\varphi(E_3)=2(E_2+E_3)$
Donc 2 est bien valeur propre.
De plus E_1, E_4 et E_2+E_3 sont éléments de E_2 donc $\text{Im}(\varphi)\subset\mathcal{E}_2$.
Et comme $\dim\text{Im}(\varphi)\geq\dim\mathcal{E}_2$ alors $\text{Im}(\varphi)=\mathcal{E}_2$
Conclusion : $\boxed{\text{Im}(\varphi)\text{ est la sous espace propre associé à la valeur propre 2}}$

d) Comme $\dim\mathcal{E}_2+\dim\mathcal{E}_0=4$, φ ne peut pas avoir d'autres valeurs propres.
Conclusion : Les valeurs propres de φ sont 0 base du sous espace propre $\mathcal{E}_0$: (E_2-E_3) et 2 avec une base de $\mathcal{E}_2$: (E_1,E_2+E_3,E_4)

Exercice 2

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe , est définie par :

$$\text{Cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\text{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi décrète uniforme sur $\{-1,1\}$.
On pose $Y=UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité , définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\text{P})$.

1. a) $((U=-1),\ (U=1))$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}\text{P}(Y\leq x)&=\text{P}(Y\leq x\cap U=-1)+\text{P}(Y\leq x\cap U=1)\\&=\text{P}(UX\leq x\cap U=-1)+\text{P}(UX\leq x\cap U=1)\\&=\text{P}(X\geq -x\cap U=-1)+\text{P}(X\leq x\cap U=1)\end{aligned}$$

b) Comme U et X sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \leq x) &= \mathrm{P}(X \geq -x)\,\mathrm{P}(U=-1) + \mathrm{P}(X \leq x)\,\mathrm{P}(U=1) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \Phi(-x)\right) + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
&= \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

avec Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

Conclusion : $\boxed{Y \text{ suit la même loi que } X}$

2. a) On a $E(U) = -1\mathrm{P}(U=-1) + 1\mathrm{P}(U=1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

   b) On a $XY = X^2U$ donc $E(XY) = E(X^2U)$ et comme U et X^2 sont indépendantes, $E(X^2U) = E(X^2)\,E(U) = 0$

   (X^2 a une espérance car X a une variance !)

   Conclusion : $\boxed{E(XY) = 0}$

   c) On a donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = 0$ (espérance nulle pour $\mathcal{N}(0,1)$)

3. a) On a $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$

   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} = 1$ et par parité $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} = \frac{1}{2}$ et

   Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}}$

   b) Dans $\int_0^A x^4 e^{-x^2/2} dx$ on pose $u'(x) = xe^{-x^2/2}$: $u(x) = -e^{-x^2/2}$: $v(x) = x^3$: $v'(x) = 3x^2$ avec u et v de classe C^1 donc

$$\begin{aligned}
\int_0^A x^4 e^{-x^2/2} dx &= \left[-x^3 e^{-x^2/2}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-x^2/2} 3x^2 dx \\
&= -A^3 e^{-A^2/2} + 3\int_0^A x^2 e^{-x^2/2} dx
\end{aligned}$$

   c) Quand A tend vers $+\infty$, on a $A^3 e^{-A^2/2} = \exp\left(-\frac{A^2}{2} + 3\ln(A)\right)$ avec $-\frac{A^2}{2} + 3\ln(A) = A^2\left(-\frac{1}{2} + 3\ln(A)/A\right) \to -\infty$ et donc $A^3 e^{-A^2/2} \to 0$

   D'autre part, $\int_0^A x^2 e^{-x^2/2} dx \to \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$ donc

   $\int_0^A x^4 e^{-x^2/2} dx \to \dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2}$

   Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx \text{ converge et vaut } \dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2}}$

   d) X a un moment d'ordre 4 si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ converge.

   Or $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx$ converge, donc par parité $\int_{-\infty}^0 x^4 e^{-x^2/2} dx$ converge également et vaut la même chose.

   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ converge et vaut $2\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2} = 3.$

   Conclusion : $\boxed{X \text{ a un moment d'ordre 4 et } E(X^4) = 3}$

4. a) On a $X^2Y^2 = X^4U^2$ avec $U^2 = 1$ donc $X^2Y^2 = X^4$ et

   Conclusion : $\boxed{E(X^2Y^2) = E(X^4) = 3}$

b) Comme X^2, Y^2 et X^2Y^2 ont une espérance alors (X^2, Y^2) a une covariance et $\text{Cov}(X^2, Y^2) = E(X^2Y^2) - E(X^2)E(Y^2) = 3 - 1 \cdot 1$

Conclusion : $\boxed{\text{Cov}(X^2, Y^2) = 2}$

c) **Si** X^2 et Y^2 sont indépendantes **alors** $\text{Cov}(X^2, Y^2) = 0$ donc (contraposée)
comme $\text{Cov}(X^2, Y^2) \neq 0$ **alors** X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.
Et **si** X et Y sont indépendantes **alors** une fonction de X est indépendante d'une fonction de Y.
ici avec la fonction carré ;
Comme X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes **alors** X et Y ne le sont pas.

d) *Conclusion :* Si X et Y sont indépendantes alors la covariance est nulle
Mais la réciproque est fausse.

Exercice 3

1. a) On étudie les variations de $g(x) = x - \ln(x)$
g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		
$x-1$		$-$	0	$+$	affine
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+ \searrow$	1	$\nearrow +$	

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x > 0 : g(x) > 0}$

b) f est définie en 0 et en x tel que $x > 0$ et $x - \ln(x) \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est définie sur } [0, +\infty[}$

2. a) f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues.
En 0 : pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(x)(-1 + x/\ln(x))} \\ &= \frac{1}{-1 + x/\ln(x)} \to -1 = f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue en 0.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

b) Pour $x > 0$, le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} + 1}{x} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(x) + x}{x(x - \ln(x))} \\ &= \frac{1}{x - \ln(x)} \to 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } 0^+ \text{ et } f'_d(0) = 0}$

3. a) Sur $]0,+\infty[$ on a $x-\ln(x)\neq 0$ donc f y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-\ln(x))\frac{1}{x}-\ln(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln(x))^2} \\
&= \frac{x-\ln(x)-\ln(x)(x-1)}{x(x-\ln(x))^2} \\
&= \frac{x-x\ln(x)}{x(x-\ln(x))^2} \\
&= \frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}
\end{aligned}$$

b) En $+\infty$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} \\
&= \frac{\ln(x)}{x(1-\ln(x)/x)} \\
&\to 0 \text{ car } \ln(x)=o(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(x)\to 0 \text{ quand } x\to+\infty}$

c) On a alors :

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$		$+\searrow$	0	$\searrow -$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4. Comme $x-\ln(x)>0$ le signe de $f(x)$ est celui de $\ln(x)$ (et négatif en 0)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	

5. Pour tout réel x élément de D on pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'(x)=f(x)$ et donc F' est continue.

Conclusion : $\boxed{F \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$ et son sens de variation est donné par le signe de f :

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$F(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

b) Comme $\frac{\ln(t)}{t}\geq\frac{1}{t}\geq 0$ pour $t\geq e$ et que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ diverge alors par minoration de fonction positive $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}dt$ diverge et

Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\ln(t)}{t}dt=+\infty}$

N.B. on pouvait aussi primitiver (car $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $\ln(x)$ par rapport à x) en $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$

c) On a un équivalent en $+\infty$ en factorisant :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} &= \frac{\ln(t)}{t}\frac{1}{1-\ln(t)/t} \\
&\sim \frac{\ln(t)}{t}\geq 0
\end{aligned}$$

pour tout $t \geq 1$. Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t - \ln(t)} dt$ diverge également et $\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \dfrac{\ln(t)}{t} dt = +\infty$

Et donc

Conclusion : $\boxed{\lim_{+\infty} F = +\infty}$

Pour tracer une jolie courbe représentative, il faudrait en plus la direction asymptotique.

Problème

On lance une pièce équilibrée. (la probabilité d'obtenir "pile" et celle d'obtenir "face" étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z a variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".

Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \cdots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement "obtenir un pile" par 1 et l'événement "obtenir un face" par 0.

   On rappelle que la fonction `random` renvoie, pour un argument k de type `integer` (où k désigne un entier supérieur ou égal à 1) un entier aléatoire compris entre 0 et $k - 1$.

   a) Pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus, Z doit compter le nombre de lancer. Compteur initialisé à 0 et incrémenté de 1 à chaque lancer.

      Pour avoir deux valeur 0 et 1 équiprobables, on utilise `random(2)`

      ```
      Program edhec_2007 ;
      Var z,hasard :integer ;
      begin
           randomize ; z :=0 ;
           repeat
                z :=z+1 ;
                hasard :=random(2) ;
           until (hasard=1) ;
           writeln(z) ;
      end.
      ```

   b) Pour simuler X, il faut à la fin tirer au hasard un entier dans $[[1, Z]]$; ce que se fait par `random(z)+1` (de 0 à $Z - 1$ décalé de 1)

      On rajoute donc à la fin : `x :=random(z)+1 ; writeln(x) ;`

      ou directement : `writeln(random(z)+1) ;`

2. Comme $0 \leq \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et que la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ est convergente, alors par majoration de termes positifs

   Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ est convergente}}$

3. Z est le rang du premier pile dans une suite de lancers indépendants ayant tous la probabilité $\frac{1}{2}$ de donner pile donc

   Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et donc } E(Z) = 2 \text{ et } V(Z) = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2}$

4. a) Pour tout (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, sachant $Z=k$, les numéros de 1 à k sont équiprobables.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{Z=k}(X=i) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i>k \\ \frac{1}{k} & \text{si } i \in [[1,k]] \end{array} \right.}$

b) Comme $(Z=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements alors (la formule précédente est à lire "pour $k \geq i$ ")

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=i) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{Z=k}(X=i)\,\mathrm{P}(Z=k) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

découpage valide pour $i-1 \geq 1$ mais le résultat reste exact pour $i=1$ où le découpage de la somme est inutile.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X=i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}^*}$

c) On calcule la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=i) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} 1\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Conclusion : $\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=i) = 1}$

5. a) Pour majorer $\mathrm{P}(X=i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ on majore son contenu :

Pour tout $k \geq i$: $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

On calcule la somme des majorants :

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^{M} \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{i}\sum_{h=0}^{M-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{h+i} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \sum_{h=0}^{M-i}\left(\frac{1}{2}\right)^h \\ &\to \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \end{aligned}$$

Donc

$$i\mathrm{P}\left(X=i\right)=i\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\leq i\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Conclusion : $\boxed{\forall i\in\mathbb{N}^{*}:i\mathrm{P}\left(X=i\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}$

b) On a donc $0\leq\left|i\mathrm{P}\left(X=i\right)\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ et comme la série $\sum_{i\geq1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ converge alors par majoration de termes positifs, la série $\sum_{i\geq1}i\mathrm{P}\left(X=i\right)$ converge absolument

Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance.}}$

c) On a alors

$$\begin{aligned}
E\left(X\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty}i\mathrm{P}\left(X=i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\left[i\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right] \text{ et en permutant}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\sum_{i=1}^{k}i\right]\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\frac{k\left(k+1\right)}{2}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right) \text{ réindexé } h=k+1\\
&= \sum_{h=2}^{+\infty}h\left(\frac{1}{2}\right)^{h}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}}-\frac{1}{2}\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien } E\left(X\right)=\frac{3}{2}}$

6. a) Comme $i^{2}\mathrm{P}\left(X=i\right)\leq i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ dont la série converge, alors par majoration de termes positifs, la série $\sum_{i\geq1}i^{2}\mathrm{P}\left(X=i\right)$ converge absolument

Conclusion : $\boxed{X^{2} \text{ a donc une espérance et } X \text{ a un moment d'ordre 2}}$

b) Et comme précédemment :

$$\begin{aligned}
E\left(X^{2}\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty}i^{2}\mathrm{P}\left(X=i\right)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\sum_{i=1}^{k}i^{2}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}{6}\right]\\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k+1\right)\left(2k+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}
\end{aligned}$$

c) On développe de part et d'autre :

$$\begin{array}{rcl}(k+1)(2k+1) & = & 2k^2+3k+1 \\ ak(k-1)+bk+c & = & ak^2+(b-a)k+c\end{array}$$

Donc pour $c=1$: $a=2$ et $b=3+a=5$ on a

Conclusion : $\boxed{2k(k-1)+5k+1=(k+1)(2k+1)}$

d) On a alors

$$\begin{array}{rcl}E\left(X^2\right) & = & \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(2k(k-1)+5k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ & = & \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\frac{5}{6}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k-1\right] \\ & = & \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}+\dfrac{5}{6}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{6}\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right] \\ & = & \dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{6} \\ & = & \dfrac{19}{6}\end{array}$$

Et

$$\begin{array}{rcl}V(X) & = & E\left(X^2\right)-E(X)^2 \\ & = & \dfrac{19}{6}-\dfrac{9}{4} \\ & = & \dfrac{11}{12}\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{V(X)=\dfrac{11}{12}}$

7. a) Comme X a une variance : $\mathrm{P}(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$ pour tout $\varepsilon>0$

b) On fait apparaître $X-3$ en prenant $\varepsilon=\frac{3}{2}$:

$$\begin{array}{rcl}\left(\left|X-\dfrac{3}{2}\right|\geq\dfrac{3}{2}\right) & = & \left(X-\dfrac{3}{2}\geq\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(X-\dfrac{3}{2}\leq-\dfrac{3}{2}\right) \\ & = & (X\geq 3)\cup(X\leq 0)\ \text{ impossible} \\ & = & (X\geq 3)\end{array}$$

Donc

$$\mathrm{P}(X\geq 3)\leq\frac{V(X)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{9}{4}}=\frac{11}{27}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X\geq 3)\leq\dfrac{11}{27}}$

8. On se propose de calculer $\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(X=2)$ et $\mathrm{P}(X\geq 3)$.

a) Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N} on$ a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} &= \sum_{h=0}^{n-1} x^h \\ &= \frac{1-x^n}{1-x}\end{aligned}$$

b) Soit donc pour tout $x \neq 1$: $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} f(x)\,dx &= \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{1/2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{et d'autre part} \\ \int_0^{1/2} f(x)\,dx &= \int_0^{1/2} \frac{1-x^n}{1-x} dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx \\ &= \left[-\ln(1-x)\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx \\ &= \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx}$

c) Sur $[0, 1/2]$ on encadre le contenu :

$$\begin{aligned}0 &\leq x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \\ \frac{1}{2} &\leq 1-x \leq 1 \text{ donc} \\ 0 &\leq \frac{1}{1-x} \leq 2 \\ 0 &\leq \frac{x^n}{1-x} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

et comme $0 \leq \frac{1}{2}$ (bornes) l'inégalité de la moyenne donne

$$0\frac{1}{2} \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

et par encadrement ($|1/2| < 1$ donc $(1/2)^n \to 0$) $\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx \to 0$ quand $n \to +\infty$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx = 0}$

d) On revient à

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} &= \ln(2)-\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx\\ &\to \ln(2)\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\ln(2)$ ce qui est

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X=1)=\ln(2)}$

On a $\mathrm{P}(X=2)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-\frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X=2)=\ln(2)-\dfrac{1}{2}}$

et enfin, $(X\geq 3)$ est l'événement contraire de $(X=1\cup X=2)$ donc $\mathrm{P}(X\geq 3)=1-\mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=2)$ et

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X\geq 3)=\dfrac{3}{2}-2\ln(2)}$

On obtient comme valeur approchée :

$$\mathrm{P}(X\geq 3)\simeq 1,5-1,4\simeq 0.1$$

Alors que l'on avait trouvé $\mathrm{P}(X\geq 3)\leq\dfrac{11}{27}=0,4$

Comme à l'ordinaire, Bienaymé-Chebichev ne donne pas de majoration serrée !