EDHEC Eco 2010

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
5. a) Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.
   b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
6. Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln x - \ln y.$$

   Montrer que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $g(x, y) \geq 2\ln 2$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
   c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1 + x) \leq x$.
   d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, \mathrm{e}^2]$.
4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
   b) Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
   c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.[1)]

1. a) Vérifier que f est une fonction paire.

   b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

   a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $F_Y(x) = F_X(\mathrm{e}^x) - F_X(-\mathrm{e}^x)$.

   b) Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

   c) Montrer que, si x est positif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $[0, 1[$ et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement négatif.

   d) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$ et reconnaître la loi de Z.

   e) Simulation informatique de la loi de Y. On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction `random` permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$. Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
Function expo :real ;
Begin
     expo := --------- ;
End ;
```

Problème

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1.$$

Partie 1 : étude de f.

1. a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   b) Déterminer la dimension de Im f puis celle de Ker f.

c) Donner alors une base de Ker f, puis en déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.

d) Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

e) En déduire que f est diagonalisable.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

   b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

   c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$.

   d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de la manière suivante :

1. – Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{ème}$ tirage.
   – On procède au 1^er tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
   – Après le $k^{ème}$ tirage ($k \in \mathbf{N}^*$) :
   Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{ème}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{ème}$ tirage.
   Soit X_k a pris la valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{ème}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

2. Reconnaître la loi de X_1.

3. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

   On rappelle que `random(n)` renvoie un entier compris entre 0 et `n`-1.

   Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
Program simul ;
var i,k,X,tirage : integer ;
Begin
     Readln(k) ; X :=random(3)+1 ;
     For i :=2 to k do begin
          tirage :=random(3)+1 ;
          If X=1 then X := -------
          else If tirage <> X then X := ------- ;
     end ;
     Writeln(X) ;
End.
```

4. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{ème}$ ligne est $P(X_k = i)$.

   a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\}\times\{1, 2, 3\}$.

b) On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbf{N}$, on a : $U_k = AU_0$.

d) Vérifier que $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbf{N}$, on a : $A^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

f) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

g) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

h) Écrire une fonction Pascal, notée `esp`, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.