Corrigé EML 2000 voie Eco par Pierre veuillez

Exercice 1 :

On considère une matrice carrée d'ordre 3 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.On considère, pour tout nombre réel a, la matrice carrée réelle d'ordre 3 :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. a) $(J-\alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -\alpha x + 2y + z = 0 \\ (-\alpha-1)\,y + 2z = 0 \quad L_2 - (-\alpha-1)\,L_3 \\ y + (-\alpha)\,z = 0 \end{cases}$

   $\iff (1) \begin{cases} -\alpha x + 2y + z = 0 \\ [2+\alpha(-\alpha-1)]\,z = 0 \\ y - \alpha z = 0 \end{cases}$

   avec $[2+\alpha(-\alpha-1)] = -\alpha^2 - \alpha + 2$ qui a pour racines $\alpha = 1$ et $\alpha = -2$ donc

   - si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -2$

     $(1) \iff (2) \begin{cases} -\alpha x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

     - et si de plus $\alpha \neq 0$ alors
       $(2) \iff x = y = z = 0$ et α n'est pas valeur propre.
     - Si, par contre, $\alpha = 0$ alors
       $(2) \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et donc 0 est valeur propre associé au sous espace propre $\mathrm{Vect}\left((1,0,0)\right)$

   - Si $\alpha = 1$ alors $(1) \iff \begin{cases} x = 3z \\ y = z \end{cases}$

     Donc $\alpha = 1$ est bien valeur propre associé au sous espace propre $E_1 = \mathrm{Vect}\left((3,1,1)\right)$

   - Si $\alpha = -2$ alors $\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}z \\ y = -2z \end{cases}$

     Donc $\alpha = -2$ est valeur propre associé au sous espace propre $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left((3/2,-2,1)\right)$

   b) J qui a trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable
   avec $\left((1,0,0),(3,1,1),(3/2,-2,1)\right)$ base de vecteurs propres.

   Donc avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ on a $J = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

   c) Et comme $M_a = J + aI$ on a alors $M_a = P \cdot (D + aI) \cdot P^{-1}$ avec $D_a = D + aI$ qui est bien diagonale.

   d) M_a est inversible si et seulement si $(D + aI)$ l'est.

   Conclusion : $\boxed{M_a \text{ inversible pour } a \text{ différent de 0, -1 et 2}}$

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.

   a) Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$

      i. On a $X \cdot M_a = X^3 = Ma \cdot X$ donc X commute avec M_a.
      Et comme $J = M_a - aI$ et que $X \cdot I = X = I \cdot X$ alors X commute avec J également.

      ii. C'est la question délicate :
      Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre α et U la colonne de ses coordonnées dans la base canonique.
      On a alors $J \cdot U = \alpha U$
      Que dire sur $X \cdot U$ qui fasse intervenir la commutation des matrices ?
      Soit $V = X \cdot U$. On a $J \cdot (X \cdot U) = (J \cdot X) U = X (J \cdot U) = X (\alpha U) = \alpha (X \cdot U)$
      Donc
      - si $X \cdot U$ n'est pas nul alors $X \cdot U$ est vecteur propre de J associé à la valeur propre α et donc $X \cdot U \in \text{Vect}(U)$ (car chaque sous-espace propre est de dimension1 ici) et il existe β réel tel que $X \cdot U = \beta U$.
        Donc U est vecteur propre de X
      - Si $X \cdot U = 0$ alors U est également vecteur propre de X associé à la valeur propre 0.

      Conclusion : $\boxed{\text{Si } u \text{ est vecteur propre de } f\text{, il est également vecteur propre de } h.}$

      iii. Donc la base de vecteurs propres précédente est également base de vecteurs propres de X.
      Donc il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$.
      Et comme $X^2 = P\Delta^2 P^{-1} = M_a = PD_aP^{-1}$ d'où $\Delta^2 = D_a$.

      iv. Comme $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ est diagonale, alors $\Delta^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$ et tous ses termes diagonaux sont positifs ou nuls.
      Donc ceux de D_a également et $-2 + a \geqslant 0$ d'où : $a \geqslant 2$.

   b) Réciproquement, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, alors $a,\ 1 + a$ et $-2 + a$ sont positifs.
   Soit alors $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-2+a} \end{pmatrix}$ alors $\Delta^2 = D_a$ et avec $X = P\Delta P^{-1}$ on a :

$$X^2 = P\Delta^2 P^{-1} = M_a$$

   c) *Conclusion :* $\boxed{\text{l'équation } X^2 = M_a \text{ a une solution si et seulement si } a \geqslant 2}$

Exercice 2 :

On considère la fonction $f :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[\end{cases}.$$

1. a) f est continue en x tel que $1+x>0$ et $x \neq$ donc sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
   En 0 : $\ln(1+x) = \ln(x+1) \sim x$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1 = f(0)$ et f continue en 0.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur }]-1;+\infty[\,.}$

   b) Et f est de classe C^1 sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^1.
   et pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

   c) Par développement limité en 0 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2 + x^2\varepsilon_2(x)}{x^2(1+x)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)}{1+x} \to -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{f'(x) \text{ tend vers } -\dfrac{1}{2} \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0}$

   d) Comme f est continue en 0 et que $f'(x) \to \frac{-1}{2}$ alors f est C^1 en 0 également et $f'(0) = \frac{-1}{2}$.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1;+\infty[}$

2. Soit $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x)$.
   g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1-1-x}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

d'où

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$- \nearrow$	0	$\searrow -$	

d'où $\dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leqslant 0$ et comme $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

alors

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

En -1 : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to +\infty$

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(x(1+1/x))}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(1+1/x)}{x} \to 0$ car $\ln(x) = o(x)$ quand $x \to +\infty$.

3. Si $\frac{-1}{2} < x < 0$ alors $-1 < 2x$ donc f sera continue sur l'intervalle d'intégration. $[x, 2x]$ ou $[2x, x]$ suivant que x est positif ou négatif.

   Donc $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$ existe pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

4. On considère la fonction $F : \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$, par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

   a) Soit Φ une primitive de f sur $]-1, +\infty[$ et $x \in \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

   Alors x et $2x \in]-1, +\infty[$, f est continue sur l'intervalle d'intégration et $F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$.

   Donc F est dérivable en x et

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = 2f(2x) - f(x) \\ &= 2\frac{\ln(1+2x)}{2x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ &= \frac{\ln(1+2x) - \ln(1+x)}{x} \end{aligned}$$

   - Si $x > 0$ alors $1 + 2x > 1 + x$ et $\ln(1+2x) > \ln(1+x)$ d'où $F'(x) > 0$
   - Si $x = 0$ alors $F'(x) = 2f(0) - f(0) = 1 > 0$
   - Si $x > 0$ alors $1 + 2x < 1 + x$ et $\ln(1+2x) < \ln(1+x)$ d'où (dénominateur $x > 0$) $F'(x) > 0$

   Conclusion : $\boxed{F \text{ est dérivable et strictement croissante sur } \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[}$

   b) Pour minorer l'intégrale, on travaille sur le contenu, avec là encore l'ordre des bornes qui dépend du signe de x.

   Si $x > 0$ alors $x < 2x$ et comme f est décroissante, pour tout $t \in [x, 2x]$: $f(t) \geqslant f(2x)$

   Et (bornes croissantes) $\int_x^{2x} f(t)\,dt \geqslant \int_x^{2x} f(2x)\,dt$ d'où $F(x) \geqslant xf(2x)$

   Conclusion : $\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, F(x) \geqslant xf(2x).}$

   c) Et comme $xf(2x) = \ln(1+2x) \to +\infty$ alors

   Conclusion : $\boxed{F(x) \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$

   d) $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ est impropre en -1.

   Comme $\ln(1+x) = o\left(\frac{1}{(1+x)^{1/2}}\right)$ et que $\int_{-1} \frac{1}{(1+x)^{1/2}} dx$ est une intégrale de Riemann (par changement de variable $x = t - 1$) convergente alors par majoration de fonction négative, $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ converge également.

   Pour dire que $F(x) \to F\left(-\frac{1}{2}\right)$, il faudrait avoir la continuité de F en $\frac{-1}{2}$.

On fait apparaître $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ dans l'expression de $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} f(t)\,dt \\ &= -\int_{2x}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt \\ &\to \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt + 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F(x) \to -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt \text{ quand } x \to -\frac{1}{2}, \text{ limite finie.}}$

Exercice 3 :

I Premier protocole

1. On peut le traiter en décomposant l'événement :
   $(X = k)$ signifie que le premier roi rouge apparaît au $k^{ième}$ tirage. Cela arrive au plus tard au $2n - 1^{ème}$ tirage car il ne reste alors que les deux rois rouges.
   Donc que l'on n'en a pas eu avant (E)et qu'au $k^{ième}$ on en a un (R).
   Donc $(X = k) = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap R_k$ et

$$\begin{aligned} p(X = k) &= p(E_1) \cdot p(E_2/E_1) \ldots p(E_{k-1}/E_1 \cap \ldots E_{k-2})\, p(R_k/E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{k-1}) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdots \frac{2n-2-(k-2)}{2n-(k-2)} \cdot \frac{2}{2n-(k-1)} \end{aligned}$$

   car, par exemple, quand on a tiré déjà $E_1 \cap \ldots E_{k-2}$ il reste $2n - 2 - (k-2)$ cartes qui ne sont pas des rois rouges parmi $2n - (k-2)$ cartes équiprobables.
   Or $(2n-2)(2n-3)\ldots(2n-k) = (2n-2)!/(2n-k-1)!$
   et $(2n)(2n-1)\ldots(2n-k+1) = (2n)!/(2n-k)!$ donc

$$p(X = k) = \frac{2(2n-2)!\,(2n-k)!}{(2n-k-1)!\,(2n)!} = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

   En dénombrant :
   Les découvertes (successifs et sans remise) sont les listes sans répétition de $2n$ cartes parmi $2n$ (permutations) équiprobables. Il y en a $|\Omega| = (2n)!$
   $(X = k)$ est déterminé par :
   - la liste sans répétition des $k-1$ premières cartes non roi parmi $2n-2$. Il y en a : $\dfrac{(2n-2)!}{(2n-(k-1))!}$
   - le roi rouge (en $k^{ième}$) parmi 2. Il y en a 2
   - la liste sans répatition des $2n-k$ cartes restantes parmi les $2n-k$ restantes (permutations).Il y en a $(2n-k)!$

Donc

$$\begin{aligned}
|X=k| &= \frac{(2n-2)!}{(2n-(k-1))!}\cdot 2\cdot(2n-k)! \\
&= (2n-2)!\cdot 2\cdot(2n-k) \text{ et} \\
\mathrm{P}(X=k) &= \frac{(2n-2)!\cdot 2\cdot(2n-k)}{(2n)!} \\
&= \frac{2\cdot(2n-k)}{2n(2n-1)} = \frac{2n-k}{n(2n-1)}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} kp(X=k) = \sum_{k=1}^{2n-1} k\frac{2n-k}{n(2n-1)} = \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{2n-1} k(2n-k) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} k2n - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2\right) = \frac{1}{n(2n-1)}\left(2n\sum_{k=1}^{2n-1} k - \frac{(2n-1)(2n+1)(4p-2+1)}{6}\right) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\left(2n\frac{(2n-1)(2n)}{2} - \frac{(2n-1)(2n)(4n-2+1)}{6}\right) \\
&= \frac{2n(2n-1)}{n(2n-1)}\left(n-\frac{4n-1}{6}\right) = 2\left(\frac{6n}{6}-\frac{4n-1}{6}\right) = \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

3. On a $G_1 = a - X$ et on a donc $E(G_1) = a - E(X) = a - \dfrac{2n+1}{3}$

II Deuxième protocole

1. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, $(G_2 = a-k)$ signifie que l'on a retourné un roi rouge au $k^{ième}$ tirage. Donc $(G_2 = a-k) = (X=k)$.
   et $p(G_2 = a-k) = p(X=k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$
2. $(G_2 = -n)$ signifie que l'on a pas tiré de roi rouge jusqu'au $n^{ième}$ tirage.
   Donc $(G_2 = -n) = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$ et

$$\begin{aligned}
p(G_2 = n) &= p(E_1)\cdot p(E_2/E_1)\ldots(E_n/E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{n-1}) \\
&= \frac{2n-2}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\cdots\frac{2n-2-(n-1)}{2n-(n-1)} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!}\cdot\frac{n!}{(2n)!} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

3. Les valeurs de G_2 sont $\{a-k \,/\, k \in [[1,n]]\} \cup \{-n\}$ (réunion disjointe car $a > 0$)
   On ne peut pas réindexer par $j = a-k$ car on ne sait pas si la valeur k est entière ou non.

On a alors (courageusement)

$$
\begin{aligned}
E\left(G_2\right) &= \sum_{k=1}^{n}(a-k)\,p\left(G_2=a-k\right)+(-n)\,p\left(G_2=-n\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(a-k)\,\frac{2n-k}{n\left(2n-1\right)}-n\frac{n-1}{2\left(2n-1\right)}\\
&= \frac{1}{n\left(2n-1\right)}\sum_{k=1}^{n}(a-k)\left(2n-k\right)-n\frac{n-1}{2\left(2n-1\right)}\\
&= \frac{1}{2n\left(2n-1\right)}\left[2\sum_{k=1}^{n}(a-k)\left(2n-k\right)-n^2\left(n-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{2n\left(2n-1\right)}\left[2\sum_{k=1}^{n}\left[2na-(2n+a)\,k+k^2\right]-n^2\left(n-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{2n\left(2n-1\right)}\left[4na\sum_{k=1}^{n}1-2\left(2n+a\right)\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}k^2-n^2\left(n-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{2n\left(2n-1\right)}\left[4n^2a-2\left(2n+a\right)\frac{n\left(n+1\right)}{2}+2\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}-n^2\left(n-1\right)\right]\\
&= \frac{n}{2n\left(2n-1\right)}\left[4na-\left(2n+a\right)\left(n+1\right)+\frac{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{3}-n\left(n-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{2\left(2n-1\right)}\left[\left(3n-1\right)a-2n\left(n+1\right)+\frac{2n^2+3n+1-3n^2+3n}{3}\right]\\
&= \frac{1}{6\left(2n-1\right)}\left[3\left(3n-1\right)a-6n\left(n+1\right)-n^2+6n+1\right]\\
&= \frac{1}{6\left(2n-1\right)}\left[3\left(3n-1\right)a-7n^2+1\right]=\frac{3\left(3n-1\right)a-\left(7n^2-1\right)}{6\left(2n-1\right)}
\end{aligned}
$$

III Comparaison des deux protocoles

On compare les gain moyens obtenus par les deux méthodes dans le cas où $n = 16$:

$$\begin{aligned} E(G_2) - E(G_1) &= \frac{3(3 \cdot 16 - 1)\,a - (7 \cdot 16^2 - 1)}{6(2 \cdot 16 - 1)} - a + \frac{2 \cdot 16 + 1}{3} \\ &= -\frac{15}{62}a + \frac{85}{62} \end{aligned}$$

donc si $a \leq 17/3$ alors la différence est positive et il vaut mieux choisir la méthode 2, sinon, la méthode 1 est préférable.

(EML 2000)