PREMIER EXERCICE

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\frac{e^t\sqrt{1+t^2} - e^t\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}(2t)}{\sqrt{1+t^2}^2} \\ &= 2e^t\frac{1+t^2-t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

On étudie le signe du polynôme du second degré $t^2 - t + 1$ qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R} : t^2 - t + 1 > 0$ et $f'(t) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Etude aux bornes :

En $-\infty : f(t) \to 0$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2e^t}{\sqrt{t^2(1+1/t^2)}} = \frac{2e^t}{|t|\sqrt{(1+1/t^2)}} = \frac{e^t}{t}\frac{2}{\sqrt{(1+1/t^2)}} \\ &\to +\infty \quad \text{car } t = o\left(e^t\right) \end{aligned}$$

(L'étude des branches infinies n'était pas demandé, une seule valeur simple : en 0 où $f(0) = 2$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(t)$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. **a)** Pour la première inégalité, on étudie les variations de la fonction :
   $g(t) = 2e^t - t - t^2$
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = 2e^t - 1 - 2t$
   g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(t) = 2e^t - 2 = 2(e^t - 1)$, d'où

t	0		$+\infty$
$e^t - 1$	0	$\nearrow +$	
$g''(t)$	0	$+$	
$g'(t)$	1	$\nearrow +$	
$g(t)$	2	$\nearrow +$	

   Et donc pour tout $t \in [0, +\infty[: \quad 2e^t - t - t^2 > 0$
   On résout la seconde équation : pour $t \geq 0$
   $1 + t \geq \sqrt{1+t^2} \iff (1+t)^2 \geq \sqrt{1+t^2}^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $1 + t$ et $\sqrt{1+t^2}$ en sont éléments
   $\iff 1 + 2t + t^2 \geq 1 + t^2 \iff 2t \geq 0$ ce qui et vrai sur $\mathbb{R}^+$
   Donc pour tout $t \in [0, +\infty[: \quad 1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$

   b) On résout à présent $f(t) > t$ pour $t \geq 0$:

$$\frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} > t \iff 2e^t > t\sqrt{1+t^2} \ldots ?$$

On change d'angle d'attaque : $1+t \geq \sqrt{1+t^2}$ donc **si** $2e^t > t(1+t)$ **alors** $2e^t > t\sqrt{1+t^2}$: rédaction

Comme $2e^t - t - t^2 > 0$ alors $2e^t > t(1+t)$

Comme $1+t \geq \sqrt{1+t^2}$ et $t \geq 0$ alors $t(1+t) \geq t\sqrt{1+t^2}$

Et donc $2e^t > t(1+t) \geq t\sqrt{1+t^2}$ et finalement $\dfrac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} > t$ ou encore

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad f(t) > t$$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Pour montrer que u_n tend vers $+\infty$, on montre d'abord qu'elle est croissante.
Et pour cela, on utilise que $f(t) > t$ pour $t \geq 0$ avec $t = u_n$.

- Il faut donc montrer d'abord que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$:
Comme $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.
Donc si $n \geq 1$ alors $u_n \geq 0$ et de plus $u_0 \geq 0$
Donc pour tout entier n, $u_n \geq 0$
- On peut alors utiliser $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$
La suite u est donc croissante.

En raisonnant ensuite l'absurde, on montre qu'elle n'est pas majorée par une constante :
Si u est majorée par une constante alors la suite est convergente vers une limite $\ell \geq 0$ (car $u_n \geq 0$)
Et comme f est continue en ℓ , on alors $f(\ell) = \ell$. Or $f(\ell) > \ell$
Donc la suite u n'est pas majorée.
Elle est donc croissante et non majorée et tend donc vers $+\infty$.

b) Il faut calculer les valeurs successives de u_n et de n jusqu'à ce que $u_n > 10^{-6}$ (le plus petit entier n'est pas $n = 1$)

```
program prem;
var u:real;n:integer;
begin
    n:=0;u:=1;
    repeat
        u:=2*exp(u)/sqrt(1+sqr(u));n:=n+1;
    until u > 1E-6;
    writeln(n);
end.
```

4. On considère l'application $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t)\,dt$$

a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ alors G est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $G(-x) = \int_{x}^{-x} f(t)\,dt = -\int_{-x}^{+x} f(t)\,dt = -G(x)$
Donc G est impaire.

b) Comme f est continue sur $J = \mathbb{R}$, que $x \to x$ et $x \to -x$ sont de classe C^1 sur $I = \mathbb{R}$ à valeur dans $J = \mathbb{R}$, alors G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$G'(x) = 1f(x) - -1.f(-x) = f(x) + f(-x) = 2\dfrac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$

c) Comme on ne sait pas primitiver f, on obtient la limite de G par minoration :

- Pour tout $t \leq 0$: $f(t) \geq 0$ donc pour $x > 0$ on a $-x < 0$ et $\int_{-x}^{0} f(t)\,dt \geq 0$
- Pour tout $t \geq 0$: $f(t) \geq t$ donc pour $x > 0$ on a :
  $\int_0^{+x} f(t)\,dt \geq \int_0^{+x} t\,dt = x^2/2$

Donc pour tout $x > 0$ on a $G(x) \geq x^2/2$ et par minoration, $G(x) \to +\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

d) Comme $G'(x) = 2\dfrac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En 0 elle est nulle (soit $\int_0^0 f(t)\,dt = 0$, soit par imparité $G(-0) = -G(0)$ donc $2G(0) = 0$ et $G(0) = 0$) sa dérivée y vaut 4 (pente de la tangente)

En $+\infty$, G tend vers $+\infty$ donc par imparité, G tend vers $-\infty$ en $-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

DEUXIÈME EXERCICE

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A\,M = M\} \\ E_2(A) &= \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A^2M = AM\right\} \end{aligned}$$

Partie I

1. on vérifie les critères :

   - $E_1(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - Comme $A\,0 = 0$ alors $0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - Si M et N sont deux matrices de $E_1(A)$ et α et β deux réels alors
     $\alpha M + \beta N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et
     $A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha M + \beta N$ car M et N sont dans $E_1(A)$
     Donc $\alpha M + \beta N \in E_1(A)$

   Donc $E_1(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   On admet que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. **a)** Pour montrer l'inclusion on montre que **si** $M \in E_1(A)$ **alors** $M \in E_2(A)$:
   Si $M \in E_1(A)$ alors $AM = M$ donc $A^2M = A(AM) = AM$ et donc $M \in E_2(A)$
   (on avait aussi $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

b) Si A est inversible, pour montrer l'égalité des deux ensembles, on doit montrer l'inclusion réciproque et donc que :
Si $M \in E_2(A)$ alors $A^2M = AM$ et $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ d'où $AM = M$
Alors $M \in E_1(A)$
Donc $E_2(A) \subset E_1(A)$ et finalement $E_1(A) = E_2(A)$

3. **a)** Comme on a déjà $0 \in E_1(A)$, si $A - I$ est inversible il reste à montrer que
si $M \in E_1(A)$ alors $AM = M$ d'où $AM - M = 0$ et $(A - I)M = 0$
et comme $A - I$ est inversible **alors** $M = 0$
Donc $E_1(A) = \{0\}$ si $A - I$ est inversible.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Comme B est diagonale à coefficients diagonaux non nuls, B est inversible donc $E_1(B) = E_2(B)$
Comme $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est également inversible alors $E_1(B) = \{0\} = E_2(B)$

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. On recherche les valeurs propres et les sous-espaces propres de C : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(C - \alpha I)U = 0 \iff \begin{cases} (3-\alpha)x - 2y - z = 0 \\ x - \alpha y - z = 0 \\ 2x - 2y - \alpha z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (3-\alpha)(\alpha y + z) - 2y - z = 0 \\ x = \alpha y + z \\ 2(\alpha y + z) - 2y - \alpha z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (-\alpha^2 + 3\alpha - 2)y + (2-\alpha)z = 0 \quad L_1 - L_3 \\ x = \alpha y + z \\ (2\alpha - 2)y + (2-\alpha)z = 0 \end{cases} \iff (1) \begin{cases} (-\alpha^2 + \alpha)y = 0 \\ x = \alpha y + z \\ (2\alpha - 2)y + (2-\alpha)z = 0 \end{cases}$$

Or $-\alpha^2 + \alpha = 0$ a pour solutions $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ donc

- si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors $(1) \iff (2) \begin{cases} y = 0 \\ x = z \\ (2-\alpha)z = 0 \end{cases}$
  - si de plus $\alpha \neq 2$ alors $(1) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
  - si $\alpha = 2$ alors $(2) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ et donc 2 est valeur propre associé au sous espace propre : $\operatorname{Vect}((1,0,1))$
- si $\alpha = 0$ alors $(1) \iff \begin{cases} x = z \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ et donc 0 est valeur propre associé au sous espace propre : $\operatorname{Vect}((1,1,1))$
- si $\alpha = 1$ alors $(1) \iff \begin{cases} x = z + y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ et donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre : $\operatorname{Vect}((1,1,0))$

2. Comme on a trois valeurs propre distinctes, on a une base de vecteurs propres en concaténant 3 vecteur propre associés à chacune des valeurs propres.

   Donc avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $C = P\,D\,P^{-1}$.

   (Les conditions d'ordre des terme de D et de première ligne de P étant bien respectées)

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   On a alors :

$$\begin{aligned} M \in E_1(C) &\iff CM = M \iff CPN = PN \iff P^{-1}CP = N \\ &\iff DN = N \iff N \in E_1(D). \end{aligned}$$

4. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont : $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} N \in E_1(D) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y \\ 0 = z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2u = u \\ 2v = v \\ 2w = w \end{cases} \\ &\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Donc une matrice M est dans $E_1(C)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned} M &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc une famille génératrice de $E_1(C)$ et libre (échelonnée) est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ qui est donc une base de $E_1(C)$ qui a finalement une dimension de 3.

6. Comme D donc C n'est pas inversible on ne peut pas utiliser les résultats de la question **I**2.a)

   Par contre on peut refaire le même raisonnement que précédemment :

   $M \in E_2(C) \iff C^2M = CM \iff PD^2P^{-1}N = PDP^{-1}M \iff D^2N = DN \iff N \in E_2(D)$

   Comme D est diagonale, on a son carré sur les coefficients diagonaux et

Et avec les mêmes coefficients que précédemment

$$\begin{aligned} N \in E_2(D) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \end{cases} \text{et} \begin{cases} 4u = 2u \\ 4v = 2v \\ 4w = 2w \end{cases} \\ &\iff N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc les matrices de $E_2(C)$ sont celles qui s'écrivent $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c \\ x+a & y+b & z+c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ et une famille génératrice et libre (échelonnée) de $E_2(C)$ est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

donc une base de $E_2(C)$

La dimension de $E_2(C)$ est donc 6.

Donc comme $E_1(C)$ et $E_2(C)$, n'ont pas la même dimension, ils ne peuvent pas être égaux.

TROISIÈME EXERCICE

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a.: $0 < b < l, \quad 0 < r < l, \quad 0 < v < 1 \quad$ avec $\quad b + r + v = 1$.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i ; V_i) l'événement " la i-ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte)"
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Par exemple, lorsque le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I

1. Le premier changement de couleur a lieu au plus tôt au second tirage.

   Donc $X(\Omega) = [[2; +\infty[[$

2. Pour $k \geq 2$, $(X = k)$ signifie que le premier changement de couleur a lieu au $k$ième tirage.

   Avant le $k$ième, les boules avaeint toutes la même couleur : rouge, verte ou blanche.

   Donc $(X = k) = \left(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) \cup \left(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}\right) \cup \left(V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1} \cap \overline{V_k}\right)$

   Les trois () étant incompatibles

   $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}\left(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) + \mathrm{P}\left(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}\right) + \mathrm{P}\left(V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1} \cap \overline{V_k}\right)$

   Attention les tirages ne sont pas indépendants, puisqu'ils s'arrêtent au premier changement.

   $\mathrm{P}\left(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) = \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}_{B_1}(B_2) \ldots \mathrm{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)$

   le conditionnement indiquant que les tirages continuent et les boules étant équiprobables

   $\mathrm{P}\left(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) = b \cdot b \ldots (1 - b) = b^{k-1}(1 - b)$

   Et de même pour les rouge et vert. Donc

   $\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad \mathrm{P}(X = k) = (1 - b)\, b^{k-1} + (1 - r)\, r^{k-1} + (1 - v)\, v^{k-1}$

3. Pour montrer que la variable aléatoire X admet une espérance on étudie l'absolue convergence de $\sum_{k \geq 2} k\, \mathrm{P}(X = k)$

   Tous les termes étant positif, celle-ci équivaut à la convergence.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} k\, \mathrm{P}(X = k) &= \sum_{k=2}^{N} k\left[(1 - b)\, b^{k-1} + (1 - r)\, r^{k-1} + (1 - v)\, v^{k-1}\right] \\
&= \frac{1 - b}{b} \sum_{k=2}^{N} k b^k + \frac{1 - r}{r} \sum_{k=2}^{N} k\, r^k + \frac{1 - v}{v} \sum_{k=2}^{N} k\, v^k \\
&\to \frac{1 - b}{b}\left(\frac{b}{(1 - b)^2} - 0 - b\right) + \frac{1 - r}{r}\left(\frac{r}{(1 - r)^2} - 0 - r\right) \\
&\quad + \frac{1 - v}{v}\left(\frac{v}{(1 - v)^2} - 0 - v\right)
\end{aligned}$$

   la convergence étant due à $|b| < 1$ et$|r| < 1$ et $|v| < 1$, X a donc bien une espérance.

   On simplifie alors l'expression

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{1 - b} - (1 - b) + \frac{1}{1 - r} - (1 - r) + \frac{1}{1 - v} - (1 - v) \\
&= \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - r} + \frac{1}{1 - v} - 3 + b + r + v \\
&= \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - r} + \frac{1}{1 - v} - 2
\end{aligned}$$

Partie II

On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[,\ f(x, y) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{x + y}$$

1. On a , pour tout $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{(1 - x)^2} + \frac{-1}{(x + y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{(1 - y)^2} + \frac{-1}{(x + y)^2}
\end{aligned}$$

2. Sur l'ouvert$]0,1[\times]0,1[$, f est susceptible de posséder un extremum local en I si les deux dérivées partielles premières s'y annulent donc si

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{-1}{(x+y)^2}=0\\ \frac{1}{(1-y)^2}+\frac{-1}{(x+y)^2}=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(x+y)^2}\\ \frac{1}{(1-y)^2}=\frac{1}{(x+y)^2}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(1-x)^2=(x+y)^2\\ (1-y)^2=(x+y)^2\end{array}\right.$$

Pour $(x,y)\in]0,1[\times]0,1[$ on a $1-x>0$ et $1-y>0$ et $x+y>0$ donc le système (S) précédent équivaut à :

$$\begin{aligned}(S) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}1-x=x+y\\ 1-y=x+y\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+y=1\\ x+2y=1\end{array}\right.\\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=1-2x\\ -3x=-1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=1/3\\ x=1/3\end{array}\right.\end{aligned}$$

Donc l'unique point I de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local est $I=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

3. Pour savoir si on a un extremum, on détermine alors les dérivée partielle secondes :

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{2}{(x+y)^3}\\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{2}{(x+y)^3}\\ t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2}{(1-y)^3}+\frac{2}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

et en $I=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ on a : $r=\dfrac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}+\dfrac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\dfrac{4\cdot 3^3}{2^3}=\dfrac{3^3}{2}$, $s=\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{3^3}{2^2}$ et $t=\frac{3^3}{2}$

Donc $rt-s^2=\left(\dfrac{3^3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3^3}{2^2}\right)^2=\dfrac{3^6}{2^4}\left(2^2-1\right)>0$

Donc f admet en I un extremum local.

Comme de plus $r>0$, c'est alors un minimum.

4. **a)** Comme $1-v=b+r$, on a $E(X)=f(b,r)-2$.

   b) Donc $E(X)$ est minimale lorsque $b=r=v=1/3$.

   C'est donc là que l'on aura -en moyenne- le plus tôt le premier changement de couleur.

Partie III

1. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{3^t}\,dt$ est impropre en $+\infty$

$$\begin{aligned}\int_2^M \frac{1}{3^t}\,dt &= \int_2^M e^{-t\ln(3)}dt=\left[\frac{-1}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}\right]_2^M\\ &= \frac{-1}{\ln(3)}e^{-M\ln(3)}+\frac{1}{\ln(3)}e^{-2\ln(3)}\\ &\to \frac{1}{\ln(3)}(3)^{-2}=\frac{1}{9\ln(3)}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\, dt$converge et vaut $\dfrac{1}{9\ln(3)}$

On note $\alpha = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\, dt = \alpha$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty; 2[\\ g(t) = \dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2; +\infty[\end{cases}$$

2. On vérifie les critères :

   - g est positive sur $\mathbb{R}$
   - g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
   - Enfin, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$ est impropre en $\pm\infty$ avec $\int_{-\infty}^{2} g(t)\, dt = 0$ et $\int_2^{+\infty} g(t)\, dt = \alpha/\alpha = 1$

     Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$ converge et vaut 1

   Donc g est bien une densité de probabilité.

   On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

3. On doit ici étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\, dt$ qui est impropre en $\pm\infty$

   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} t\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{2} t\, 0 dt = 0$
   - $\displaystyle\int_2^{M} t\ e^{-t\ln(3)} dt$ se calcule en intégrant par parties :

     $u'(t) = e^{-t\ln(3)} : u(t) = -\dfrac{1}{\ln(3)} e^{-t\ln(3)} : v(t) = t : v'(t) = 1$ avec u et v de classe C^1 sur $[2, M]$

$$\begin{aligned} \int_2^M t\, e^{-t\ln(3)} dt &= \left[-\frac{t}{\ln(3)} e^{-t\ln(3)} \right]_2^M - \int_2^M -\frac{1}{\ln(3)} e^{-t\ln(3)} dt \\ &= -\frac{M}{\ln(3)} e^{-M\ln(3)} - \frac{2}{\ln(3)} e^{-2\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \left[\frac{-1}{\ln(3)} e^{-t\ln(3)} \right]_2^M \\ &= -\frac{M}{3^M \ln(3)} + \frac{2}{3^2\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \left(\frac{-1}{3^M\ln(3)} + \frac{1}{3^2\ln(3)} \right) \\ &\to \frac{2\ln(3)+1}{9\ln(3)^2} \end{aligned}$$

     la limite venant de $M = o\left(3^M\right)$ quand $M \to +\infty$

   Donc Y a une espérance et $E(Y) = 9\ln(3) \dfrac{2\ln(3)+1}{9\ln(3)^2} = \dfrac{2\ln(3)+1}{\ln(3)}$

4. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

a) Comme $p\left(Y\geq 2\right)=1$ alors $Z\left(\Omega\right)=[[2,+\infty[[$
pour $k\in[[2,+\infty[[:\left(Z=k\right)=\left(k\leq Y<k+1\right)$
Donc $\mathrm{P}\left(Z=k\right)=\mathrm{P}\left(k\leq Y<k+1\right)=\int_k^{k+1}g\left(t\right)dt$ car $k\leq k+1$

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}g\left(t\right)dt &= \int_k^{k+1}9\ln\left(3\right)e^{-t\ln(3)}dt=9\ln\left(3\right)\left[\frac{-1}{\ln\left(3\right)}e^{-t\ln(3)}\right]_k^{k+1}\\ &= 9\left[-e^{-(k+1)\ln(3)}+e^{-k\ln(3)}\right]\\ &= 9\left(\frac{1}{3^k}-\frac{1}{3^{k+1}}\right)=\frac{1}{3^{k-2}}\left(1-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

b) Or pour $b=r=v=\frac{1}{3}$ on a également $k\geq 2:p\left(X=k\right)=3\frac{1}{3^{k-1}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=p\left(Z=k\right)$

Donc X et Z ont la même loi de probabilité dans ce cas.

-FIN -