EXERCICE 1

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$..

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. f est continue sur $]0,+\infty[$ (produit somme de fonctions continues)
2. En 0^+ : pour $t > 0$: $f(t) = t\ln(t) - t \to 0$ car $t\ln(t) = \frac{\ln(t)}{1/t}$ et $\ln(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$
3. f est C^1 sur $]0,+\infty[$ (produit et somme de fonctions C^1)
   et pour tout $t \in]0,+\infty[$: $f'(t) = \ln(t) + 1 - 1 = \ln(t)$
4. Pour $t > 0$: $f(t) = t\ln(t)[1 - 1/\ln(t)] \to +\infty$ quand $t \to +\infty$
5. Pour tout $t > 0$ on a $f'(t) = \ln(t)$ d'où :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t) = \ln(t)$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

6. f est C^2 sur $]0,+\infty[$ et $f''(t) = \frac{1}{t} > 0$ donc f est convexe. sur $]0,+\infty[$ (Comme f est continue, on a également la convexité sur $[0,+\infty[$)
7. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$

   a) Le taux d'accroissement en 0 est :

   $$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln(t) - 1 \to -\infty$$

   Donc Γ a une demi tangente verticale en 0.

   b) $f(t) = 0 \iff t(\ln(t) - 1) \iff t = 0$ ou $\ln(t) = 1$
   Conclusion : $\boxed{\text{les intersections sont en 0 et en } e}$

   c) On cherche une direction asymptotique en $+\infty$:

   $$\frac{f(t)}{t} = \ln(t) - 1 \to +\infty$$

   et on a donc une branche parabolique verticale.

   d) Il faut ici tracer la tangente verticale à l'origine, la tangente horizontale en 1, enfin celle en e où la pente est de $f'(e) = 1$ et la branche parabolique "au jugé"

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1\ ;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1\ ;+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

1. f étant continue sur $[0,+\infty[$ elle y possède une primitive F et donc pour $x+1$ et $x-1$ dans cet intervalle.
   Et pour $x>1$ (définition de$G$), $G(x)=\frac{1}{2}(F(x+1)-F(x-1))$.
   Donc G est dérivable sur $]1\ ;+\infty[$ (composée) $G'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1))$
   Cette fonction G' est elle même dérivable sur $]1\ ;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables (car $x+1$ et $x-1\geq 0$)
   et $G''(x)=\frac{1}{2}(f'(x+1)-f'(x-1))=\frac{1}{2}(\ln(x+1)-\ln(x-1))$
   Cette fonction étant continue, G est bien de classe C^2.
2. a) Pour tout $x>1 : x+1>x-1>0$ donc $\ln(x+1)>\ln(x-1)$ (car ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$) et $G''(x)>0$
   Donc G' est strictement croissante sur $]1\ ;+\infty[$
   b) On a $G'(2)=\frac{1}{2}(f(3)-f(1))=\frac{1}{2}(3\ln(3)-3+1)=\frac{1}{2}(3(\ln(3)-1)+1)$
   Et comme $e<3$ alors $\ln(e)<\ln(3)$ et donc $\ln(3)-1>0$ et $G'(2)>0$.
   c) On utilise le théorème de bijection :
   G' est continue et strictement croissante sur $]1;\ 2[$ donc bijective de $]1;\ 2[$ dans $]\lim_1 G';\lim_2 G'[$
   On a $G'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1))\to\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$ car f est continue sur $[0,+\infty[$
   Or $2<e$ et donc $\ln(2)<1$ et $f(2)-f(0)=f(2)<0$
   Et on a $\lim_2 G'=G'(2)>0$ (car G' est continue)
   Donc $0\in\ ]\lim_1 G';\lim_2 G'[$
   Donc l'équation $G'(x)=0$ a une unique solution α sur $]1,2[$.
   G' étant strictement croissante, elle n'en a pas d'autres sur $]1,+\infty[$.
   Donc l'équation $G'(x)=0$ admet une solution α et une seule et $\alpha<2$

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi :]1\ ;+\infty[^2\to\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y)\in\ ]1\ ;+\infty[^2$, par :

$$\Phi(x,y)=(y-f(x+1))^2+(y-f(x-1))^2$$

où l'application f est définie dans la partie **I**.

1. Les fonctions coordonnées $(x,y)\to x$ et $y\to(x,y)$ sont C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
   et f est C^2 sur $]0,+\infty[$ donc Φ est C^2 en (x,y) tels que $x+1>0$ et $x-1>0$ comme composées de fonctions C^2.
   Donc Φ est de classe C^2 sur $]1\ ;+\infty[^2$ (restriction imposée sur la seconde composante par l'énoncé)
   et pour tout (x,y) de $]1\ ;+\infty[^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) &= -2(y-f(x+1))f'(x+1)-2(y-f(x-1))f'(x-1)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) &= 2(y-f(x+1))+2(y-f(x-1))\end{aligned}$$

2. En $(\alpha, f(\alpha+1))$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha, f(\alpha+1)) &= -2(f(\alpha+1)-f(\alpha+1))f'(\alpha+1) - 2(f(\alpha+1)-f(\alpha-1))f'(\alpha-1) \\
&= -4G'(\alpha)f'(\alpha-1) \\
&= 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) &= 2(f(\alpha+1)-f(\alpha+1)) + 2(f(\alpha+1)-f(\alpha-1)) \\
&= 4G'(\alpha) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $(\alpha, f(\alpha+1))$ est bien un point critique de Φ.

3. On calcule les dérivées partielle secondes :

$$\begin{aligned}
r(x,y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,y) \\
&= 2f'(x+1)^2 - 2(y-f(x+1))f''(x+1) \\
&\quad +2f'(x-1)^2 - 2(y-f(x-1))f''(x-1) \\
s(x,y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}(x,y) \\
&= -2(f'(x+1)+f'(x-1)) \\
t(x,y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x,y) \\
&= 4
\end{aligned}$$

et en $(\alpha, f(\alpha+1))$:

$$\begin{aligned}
r &= 2f'(\alpha+1)^2 + 2f'(\alpha-1)^2 - 2(f(\alpha+1)-f(\alpha-1))f''(\alpha-1) \\
&= 2f'(\alpha+1)^2 + 2f'(\alpha-1)^2 \text{ car } f(\alpha+1) = f(\alpha-1) \\
s &= -2(f'(\alpha+1)+f'(\alpha-1)) \\
t(x,y) &= 4
\end{aligned}$$

et on a donc

$$\begin{aligned}
rt - s^2 &= 4\left[2f'(\alpha+1)^2 + 2f'(\alpha-1)^2 - \left(f'(\alpha+1)^2 + f'(\alpha-1)^2 + 2f'(\alpha+1)f'(\alpha-1)\right)\right] \\
&= 4\left[f'(\alpha+1)^2 + f'(\alpha-1)^2 - 2f'(\alpha+1)f'(\alpha-1)\right] \text{ Remarquable!} \\
&= 4\left[f'(\alpha+1) - f'(\alpha-1)\right]^2
\end{aligned}$$

enfin, comme $1 < \alpha < 2$ alors $0 < \alpha - 1 < 1$ et $f'(\alpha-1) = \ln(\alpha-1) < 0$
d'autre part $\alpha + 1 > 2$ donc $f'(\alpha+1) > 0$ et finalement $f'(\alpha+1) - f'(\alpha-1)^2 > 0$ et $rt - s^2 > 0$.
On a donc un extremum local sur l'ouvert $]1; +\infty[^2$ qui est un minimum puisque $t > 0$.

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
$(A-\alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\alpha)\,x+y+z=0 \\ -\alpha y - z = 0 \\ -2x-2y-(1+\alpha)\,z=0 \end{cases}$
$\Longleftrightarrow (1) \begin{cases} z=-\alpha y \\ (1-\alpha)\,x+(1-\alpha)\,y=0 \\ -2x+(-2+\alpha+\alpha^2)\,y=0 \end{cases}$
   - Si $\alpha \neq 1$ alors $(1) \Longleftrightarrow (2) \begin{cases} z=-\alpha y \\ x=-y \\ (\alpha+\alpha^2)\,y=0 \end{cases}$
     - si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ alors $\alpha+\alpha^2 \neq 0$ et $(2) \Longleftrightarrow x=y=z=0$ donc α n'est pas valeur propre.
     - si $\alpha = 0$ alors $(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=-y \end{cases}$ rectifié en $\Longleftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=-x \end{cases}$ pour la seconde ligne de P et $(0,0,0)$ n'est pas la seule solution.
       Donc $\alpha = 0$ est valeur propre associée à $E_0 = \text{Vect}\left((1,-1,0)\right)$
     - si $\alpha = -1$ alors $(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} z=y \\ x=-y \end{cases}$ donc $\alpha=-1$ est valeur propre associée à $E_{-1} = \text{Vect}\left((-1,1,1)\right)$
   - Si $\alpha = 1$ alors $(1) \begin{cases} z=-y \\ x=0 \end{cases}$ donc $\alpha = 1$ est propre associée à $E_1 = \text{Vect}\left((0,1,-1)\right)$
2. La matrice A d'ordre 3 ayant trois valeurs propres distinctes, la concaténation des trois vecteurs propres $\left((1,-1,0),(-1,1,1),(0,1,-1)\right)$ forme donc une base de vecteurs propres et A est diagonalisable.
Donc avec la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice D ayant sur sa diagonale les valeurs propres dans le même ordre que les vecteurs propres associés, on a $A = P\ D\ P^{-1}$
On calcule P^{-1} par Gauss :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2+L_1 \to L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1+L_3 \to L_1 \\ L_2 \to L_3 \\ L_3 \to L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1+L_3 \to L_1 \\ L_2+L_3 \to L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \text{ (que l'on vérifie en calculant } PP^{-1} = I \text{)}$$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C$ qui est bien diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. On a $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\dim(E) = 3^2 = 9$
2. f est bien une application de E dans E.
   Pour M et N de E et x et y réels on a :
$$\begin{aligned} f(xM+yN) &= A(xM+yN)+(xM+yN)B \\ &= x(AM-MB)+y(AN-NB) \\ &= xf(M)+yf(N) \end{aligned}$$
   donc f est linéaire et est un endomorphisme de E.
3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}M\ P$, où P est définie en **I.2**.
   a) $M \in \ker(f) \iff f(M) = 0 \iff AM = MB \iff APNP^{-1} = PNP^{-1}B$
   $\iff P^{-1}APNP^{-1}P = P^{-1}PNP^{-1}BP \iff DN = NC$
   Donc $M \in \ker(f) \iff DN = NC$
   b) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $NC = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ d & 0 & -f \\ g & 0 & -i \end{pmatrix}$
   Donc $DN = NC \iff \left\{\begin{array}{lll} 0 = a & & 0 = -c \\ -d = d & -e = 0 & -f = -f \\ g = g & h = 0 & i = -i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} a = 0 & & c = 0 \\ d = 0 & e = 0 & \\ & h = 0 & i = 0 \end{array}\right.$
   Les matrices N vérifiant $DN = NC$ sont donc celles qui s'écrivent :$N = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec b, f et $g \in \mathbb{R}$
   c) Et avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   L'ensemble $F = \{N \ / \ DN = NC\} = \text{Vect}(J, K, L)$ est donc un espace vectoriel.
   Les trois matrices (J, K, L) qui l'engendrent sont libres (si leur combinaison est nulle, tous les coefficients le sont)
   Donc ces trois matrices forment une base de K et $\dim(K) = 3$
4. a) On a vu qu'avec $N = P^{-1}MP : M \in \ker(f) \iff DN = NC$
   Donc $\ker(f) = \{PNP^{-1} \ / \ N \in F\} = \{P(xJ + yK + zL)P^{-1} \ / \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$
   et avec $J' = PJP^{-1}$, $K' = PKP^{-1}$ et $L' = PLP^{-1}$ on a $\ker(f) = \text{Vect}(J', L', K')$
   La famille (J', L', K') est libre car si $xJ' + yK' + zL' = 0$ alors $xJ + yK + zL = 0$ donc $x = y = z = 0$.
   Elle forme donc une base de $\ker(f)$.
   Donc $\dim(\ker(f)) = 3$ et par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 6$
   b) On a $PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \ker(f)$
   et avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $AM - MB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$

EXERCICE 3

Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}$$

   a) h est dérivable sur $[0;1]$ et $h'(x) = \frac{2-x+x}{2-x} = \frac{2}{2-x} > 0$
   Donc h est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ donc bijective de $[0;1]$ dans $[h(0);h(1)] = [0;1]$
   Pour tout x et y de $[0;1]$:

$$\begin{aligned} h(x) = y &\iff \frac{x}{2-x} = y \text{ DM} \\ &\quad\ \text{il faut ici rassembler les } x \text{ au numérateur FM} \\ &\iff x = y(2-x) \\ &\iff x(1+y) = 2y \\ &\iff x = \frac{2y}{1+y} \text{ car } 1+2y \neq 0 \end{aligned}$$

   Donc $h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y}$

   b) $\alpha + \dfrac{\beta}{2-x} = \dfrac{2\alpha+\beta-\alpha x}{2-x}$ donc si $2\alpha+\beta = 0$ et $-\alpha = 1$ alors l'égalité sera vérifiée.
   Donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ conviennent

   c) On réutilise l'écriture précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x)\,dx &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{2-x}\right) dx \\ &= [-x - 2\ln(2-x)]_0^1 \\ &= -1 + 2\ln(2) \end{aligned}$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$

   a) On a $E(X) = \frac{1}{2}$ la variance est hors programme , on la recalcule :
   Densité 1 sur $[0,1]$ et 0 ailleurs.$E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ et $V(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

   b) $(X \in [0,1])$ est presque sûr.
   Pour tout $y \in [0,1]$ on a $\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right) = (h(X) \leq y) = (X \leq h^{-1}(y))$ car h^{-1} est strictement croissante sur $[0;1]$ et que X et y en sont éléments.
   Donc $\mathrm{P}\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right) = \mathrm{P}(X \leq h^{-1}(y))$ fonction de répartition de X qui vaut : $F(x) = \int_0^x 1dt = x$ si $x \in [0,1]$ et finalement
   $\mathrm{P}\left(\dfrac{X}{2-X} \leq y\right) = h^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1+y}$

c) Avec F la fonction de répartition de X, la fonction de répartition G de Y est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$G(x) = \mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}\left(\frac{X}{2-X} \le x\right) = \mathrm{P}\left(X \le \frac{2x}{1+x}\right) = F\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ si $x \in [0,1]$.
Et comme $(X \in [0,1])$ est presque sûr alors $(h(X) \in h[0,1])$ également
On ne sait pas si l'événement est égal au précédent, car on n'a étudié le sens de variation de h que sur $[0,1]$, mais il le contient :
Si $0 \le X \le 1$ **alors** $h(0) \le h(X) \le h(1)$ car h est strictement croissante sur $[0,1]$
Donc $\mathrm{P}(Y \in [0,1]) = 1$ et $G(x) = 0$ si $x \le 0$ et $G(x) = 1$ si $x > 1$
Finalement $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{1+x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ car $F(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$
Cette fonction est continue sur $]-\infty, 0[$ sur $[0,1]$ et sur $]1, +\infty[$.
En 0^{-1} : $G(x) = 0 \to 0 = G(0)$ donc G continue en 0^-
En 1^+ : $G(x) = 1 \to 1 = G(1)$ donc G est continue en 1^+
Finalement G est continue sur $\mathbb{R}$, et C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ donc Y est bien à densité.
Et une densité de Y est donnée par : $g(x) = G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(1+x)^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
On peut donner arbitrairement un nombre fini de valeurs ; ici en 0 et en 1

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,dt$ est impropre en $\pm\infty$.
$\int_{-\infty}^{0} tg(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt$ converge et est nulle ainsi que $\int_{1}^{+\infty} tg(t)\,dt$
$\int_0^1 tg(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2t}{(1+t)^2}dt = ...$ que l'on ne sait pas primitiver simplement
(il faut faire apparaître $1+t$ au numérateur pour pouvoir simplifier avec le dénominateur : $t = (1+t) - 1$) DM
il faut penser aux questions précédentes et aux moyens de calculer l'espérance.
S'il est problématique de passer par la définition, on peut repasser par $Y = \frac{X}{2-X}$ et le théorème de transfert (qui permettra d'utiliser $\int_0^1 h(t)\,dt$ et d'être en cohérence avec l'énoncé !) FM
Comme $Y = \frac{X}{2-X}$, par le théorème de transfert, on étudie l'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2-x} f(t)\,dx$.
f densité de X est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, donc l'intégrale converge absolument, et il ne reste que $\int_0^1 \frac{x}{2-x} 1dx = \int_0^1 h(x)\,dx$
Donc Y a une espérance et $E(Y) = 2\ln(2) - 1$.

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1,\ I_2 \cdots, I_n$.
Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.
Pour tout entier k tel que $1 \le k \le n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \le t)$, $(T_2 \le t)$, $\cdots (T_n \le t)$, sont indépendants.

1. Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Pour tout entier k tel que $1 \le k \le n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \le t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon. On note $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

a) Pour tout k : $B_k = (T_k \leq t)$ est le nombre d'invité parmi un (le $k^{ième}$) arrivant au plus tard à t (présents à t)

S_t est donc le nombre total d'invité présents à l'instant t.

b) Pour tout k on a $\mathrm{P}(T_k \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{t} 1dx = t$ car $t \in [0,1]$ et $B_k \hookrightarrow \mathcal{B}(t)$

S_t est une somme de n variables de Bernouilli indépendantes de même paramètre t.

Donc $S_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t)$

2. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

a) $(R_1 > t)$ signifie que la première arrivée est après t, c'est à dire ($\Longleftrightarrow$) qu'à l'instant t personne n'est encore arrivé.

Donc $(R_1 > t) = (S_t = 0)$

b) La fonction de répartition H de R_1 est déterminée par

- $H(t) = 0$ si $t \not< 0$
- $H(t) = \mathrm{P}(R_1 > t) = 1 - \mathrm{P}(S_t = 0) = 1 - (1-t)^n$ si $t \in [0,1]$
- $H(t) = 1$ si $t > 1$

H est continue sur $]-\infty, 0[$ sur $[0,1]$ et sur $]1, +\infty[$.

- en 0^- : $H(t) = 0 \to 0 = 1 - (1-0)^n = H(0)$
- en 1^+ : $H(t) = 1 \to 1 = 1 - (1-1)^n = H(1)$

Donc H est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et donc R_1 est bien à densité.

une densité est donnée par : $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ n(1-t)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

c) On s'inspire de la méthode précédente :

$(R_2 > t) =$ le second arrive après t " = " à t,il y a au plus un invité arrivé" $=(S_t \leq 1)$ avec, pour $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_t \leq 1) &= \mathrm{P}(S_t = 0) + \mathrm{P}(S_t = 1) \text{ incompatibles} \\ &= (1-t)^n + nt(1-t)^{n-1} \text{ car } S_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t) \\ &= (1-t)^{n-1}(1 + (n-1)t) \end{aligned}$$

Donc la fonction de répartition K de R_2 est définie par

$K(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (1-t)^{n-1}(1 + (n-1)t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

Elle est comme précédemment continue sur $]-\infty, 0[$ sur $[0,1]$ et sur $]1, +\infty[$ ainsi qu'en 0^- et en 1^+.

Donc K est conntinue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ donc R_2 est bien à densité et une densité est

sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} K'(t) &= (n-1)(1-t)^{n-2}(1 + (n-1)t) - (1-t)^{n-1}(n-1) \\ &= (n-1)(1-t)^{n-2}nt \end{aligned}$$

$k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ n(n-1)t(1-t)^{n-2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$