Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) Pour tout $x \neq 0$: $e^x - 1 \neq 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues.
En 0 : $e^x - 1 \sim x$ et donc pour $x \neq 0$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \to 1 = f(0)$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

b) Pour $x \neq 0$: $e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions C^1 et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

c) On a le développement limité : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1 - x\left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right]}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1\right)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}{(x + x\varepsilon_2(x))^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{(1 + \varepsilon_2(x))^2} \to -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) \underset{x \to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}}$

d) Comme f est continue en 0 et que $f'(x) \to -\dfrac{1}{2}$ alors f est C^1 en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}.}$

2. a) $u(x) = (1 - x)e^x - 1$
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1 - x)e^x - e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$		$\nearrow -$	0	$\searrow -$	

b) Comme on, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$ alors f est du signe de $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$.

Et pour $x = 0$: $f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$ alors

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.}$

c) En $-\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \to +\infty$

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{e^x(1 - 1/e^x)} \to 0$ car $x = o(e^x)$ et

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

d) En $-\infty$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x - 1} \to -1$

et

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{x}{e^x - 1} + x \\ &= \frac{xe^x}{e^x - 1} \end{aligned}$$

avec $X = -x \to +\infty$ on a $xe^x = -X/e^X \to 0$ car $X = o\left(e^X\right)$ quand $X \to +\infty$

Donc $f(x) + x \to 0$

Conclusion : $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -x \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } -\infty}$

e) On attende le tracé de

- l'asymptote en $-\infty$,
- l'asymptote horizontale ($y = 0$) en $+\infty$
- et la tangente de pente $-\frac{1}{2}$ en $(0, 1)$.

Bilan : cette partie, sans difficultés de calcul nécessite de connaître et savoir manipuler les DL, les hypothèses du th de prolongement C^1, et de voir le lien entre f' et u.
Donne aussi l'occasion d'utiliser le DL à mauvais escient

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. 0 n'est pas point fixe puisque $f(0) \neq 0$
   Pour $x \neq 0$: $f(x) = x \iff \frac{x}{e^x - 1} = x \iff 1 = e^x - 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$
   Conclusion : $\boxed{f \text{ admet un point fixe et un seul, } \alpha = \ln(2)}$
2. a) Soit $g(x) = e^{2x} - 2x\ e^x - 1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x(e^x - 1 - x) \end{aligned}$$

soit $h(x) = e^x - 1 - x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$h'(x) = e^x - 1$$

On a donc

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$\nearrow +$	
$h(x)$	0	$\nearrow +$	$+\infty$

et

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow +$	

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0; +\infty[,\ e^{2x} - 2x\ e^x - 1 \geq 0}$

b) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x-1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2(e^x-1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2(e^x-1)^2}}$

c) Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ et $-\frac{1}{2} \leq f'(x)$

Et pour $x = 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2}$.

Enfin on a vu que $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \left[0; +\infty\right[,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0.}$

d) On a donc $|f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

On montre alors, par récurrence, que pour tout n : $u_n \in \mathbb{R}^+$ (la récurrence est ici inutile car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$)

$u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \geq 1$: $u_n = f(u_{n-1}) > 0$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, pour tout entier n : u_n et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$

3. On montre alors par récurrence :

Pour $n = 0$: $|u_0 - \alpha| = \frac{1}{2}|1 - \alpha| = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$ car $\alpha = \ln(2) \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1-\alpha)\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1-\alpha)}$

4. Et comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\frac{1}{2^n}(1-\alpha) \to 0$ et comme $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$, par encadrement $|u_n - \alpha| \to 0$ et

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha = \ln(2)}$

5. Pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que$|u_n - \alpha| < 10^{-9}$, il faut calculer u_n (et n) jusqu'à ce que $|u_n - \ln(2)| < 10^{-9}$ (ce qui n'est pas le cas pour $n = 0$)

```
Program suite ;
var u :real ; n :integer ;
begin
    u :=1 ; n :=0 ;
    repeat
        n :=n+1 ;
        u :=u/(exp(u)-1) ;
    until abs(u-ln(2))<1E-9 ;
    writeln(n) ;
end.
```

Bilan : La question 2a (dont le résultat est donné) demande de la finesse. L'initiative est laissée de vérifier les hypothèses de l'IAF. Les résultats nécessaire à la continuation des calculs sont donnés (pas de blocage) Et un petit programme à faire intelligemment.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$$

1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet une primitive F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$.
On a alors $G(x) = F(2x) - F(x)$ et donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^1.
et on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2\frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } 2x \text{ et } x \neq 0 \\ &= \frac{4x - x(e^x+1)}{e^{2x}-1} \\ &= \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} \\ G'(0) &= 2f(0) - f(0) = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{G \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

2. a) Soit $x \geq 0$.On a alors $x \leq 2x$ et pour tout $x \leq t \leq 2x$: $0 \leq f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $0 \leq \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\, dt \leq \int_x^{2x} f(x)\, dt = f(x)(2x - x)$
Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0; +\infty[,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x).}$
Et comme $x\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \dfrac{x^2}{e^x}\dfrac{1}{1-e^{-x}} \to 0$, par encadrement :
Conclusion : $\boxed{G(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty}$

b) Pour $x \leq 0$ on a $2x \leq x \leq 0$ et pour tout $2x \leq t \leq x$: $f(t) \geq f(x)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'où $\int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} f(x)\,dt = f(x)(2x - x)$ car les bornes sont en ordre décroissant.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \left]-\infty; 0\right],\ G(x) \leq x\ f(x).}$

Et comme $x\ f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \to -\infty$, par majoration,

Conclusion : $\boxed{G(x) \to -\infty \text{ quand } x \to -\infty}$

3. On rassemble tout :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\ln(3)$	$-$	$+\infty$
$e^{2x} - 1$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$		$\nearrow +$	
$3 - e^x$		$\searrow +$		$\searrow +$	0	$\searrow -$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$G(\ln 3)$	$\searrow$	0

Bilan : demande de manipuler précautionneusement les inégalités.

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A

1. Les colonnes de A sont liées (première colonne nulle) donc

   Conclusion : $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$

2. A est triangulaire donc

   Conclusion : $\boxed{\text{ses valeurs propres sont } 0,\ 1 \text{ et } 4}$

   A est une matrice d'ordre 3 qui possède 3 valeurs propres distinctes

   Conclusion : $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

3. On détermine des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres (paramètrage choisi pour avoir des 1 sur la diagonale)

   $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ donc un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est $(1, 0, 0)$

   $(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x + y + 3z = 0 \\ 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ donc $(1, 1, 0)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

   $(A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4x + y + 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ donc $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4.

   Donc la famille $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$,

   la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (coefficients diagonaux égaux à 1) est inversible, la matrice D diagonale avec les valeurs propres dans le même ordre que les vecteurs propres, et $A = P\ D\ P^{-1}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_1 - L_2 \to L_1 \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_2 - L_3 \to L_3 \quad \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = P^{-1}$$

Bilan : diagonalisation facile (valeurs propres données) et matrice très facile à inverser. Il suffit de connaître le cours.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Avec $A = P\ D\ P^{-1}$ et $M = P\ N\ P^{-1}$ on a $M^2 = P\ N^2\ P^{-1}$ et
   $M^2 = A \iff P\ N^2\ P^{-1} = P\ D\ P^{-1} \iff N^2 = D$. (en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P)
2. si $N^2 = D$, alors $N\ D = N\ N^2 = N^3 = N^2\ N = D\ N$.
   Conclusion : $\boxed{\text{si } N^2 = D, \text{ alors } N\ D = D\ N.}$
3. On développe l'écriture de $N = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ et on ne calcule pas N^2 : on commence par exploiter la conséquence.
   $$N\ D = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&b&4c\\0&e&4f\\0&h&4i\end{pmatrix}$$
   $$D\ N = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\d&e&f\\4g&4h&4i\end{pmatrix}$$
   Si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$ donc $\begin{cases} 0=0 & b=0 & 4c=0\\ 0=d & e=e & 4f=f\\ 0=4g & h=4h & 4i=4i\end{cases}$ et $\begin{cases} & b=0 & c=0\\ d=0 & & f=0\\ g=0 & h=0 & \end{cases}$
   Conclusion : $\boxed{\text{Si } N^2 = D \text{ alors } N \text{ est diagonale}}$
4. Soit $N = \begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}$ on a $N^2 = \begin{pmatrix}x^2&0&0\\0&y^2&0\\0&0&z^2\end{pmatrix}$
   Donc $N^2 = D \iff x^2 = 0 : y^2 = 1 : z^2 = 4 \iff x = 0 : y = \pm 1$ et $z = \pm 1$
   Les 4 solutions sont $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$
5. Avec $M = P\ N\ P^{-1}$, les valeurs propres de M et de N sont les mêmes.

La seule solution de $N^2 = D$ de valeurs propres positive est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc la seule solutoin de (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles est

$B = P\ N\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Bilan : classique, demande de comprendre l'ordre de l'énoncé. Calculs légers.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Un polynôme de degré 2 s'écrit : $Q = aX^2 + bx + c$ avec $a,\ b$ et c réels, $a \neq 0$.

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(4) = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 16a + 4b = 2 \quad L_3 - 4L_2 \to L_3 \end{cases},$$

$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 12a = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 7/6 \\ a = -1/6 \end{cases} \text{ et } a \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Cet unique polynôme de degré 2 est : } Q = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X}$

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

2. On reconnaît $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = Q(A)$

Pour chaque terme de la diagonale (0, 1et 4)de D on a $Q(terme) =$ diag de B

$-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D = \begin{pmatrix} Q(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1} = P\ N\ P^{-1} = B$ avec N la matrice à valeurs propres positives du **II.5.**)

Conclusion : $\boxed{-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B}$

3. Pour toute matrice carrée F d'ordre trois :

Si $A\ F = F\ A$ alors $A^2F = AFA = FAA = FA^2$ et donc $\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)F = F\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)$ d'où $B\ F = F\ B$

Réciproquement,

si $B\ F = F\ B$ alors $B^2F = BFB = FBB = FB^2$ et comme $B^2 = A$, on a donc $A\ F = F\ A$

Conclusion : $\boxed{A\ F = F\ A \iff B\ F = F\ B.}$

Bilan : demande de la finesse, équivalence par double implication.

EXERCICE 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Tant que l'on n'a pas de boule noire, la probabilité d'en obtenir une reste q (boules équiprobables)
   Donc T est le rang du premier succès dans un processus sans mémoire et
   Conclusion : $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(q)\,,\ E(T) = \frac{1}{q},\ V(T) = \frac{p}{q^2} \text{ et pour tout } k \geq 1 : \mathrm{P}(T = k) = p^{k-1}q}$
2. $(U = k)$ signifie que $(T = k + 1)$ donc $U = T - 1$ et
   Conclusion : $\boxed{U \text{ a une espérance et une variance, } E(U) = E(T) - 1 = \frac{p}{q} \text{ et } V(U) = V(T) = \frac{p}{q^2}}$

Bilan : signification de la variable aléatoire

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z. la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.
Pour tout entier naturel non nul i, on note :
  B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
  N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

1. a) $(X = k)$ signifie que l'on a effectué k tirages :
   on a donc eu $k-1$ blanches puis une noire ou $k-1$ noires puis une blanche. (incompatibles)
   $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(N_1)\,\mathrm{P}_{N_1}(N_2)\cdots \mathrm{P}_{N1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k) + \mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(B_2)\cdots \mathrm{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)$ le conditionnement indiquant que l'expérience se poursuit.
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k \geq 2 : \mathrm{P}(X = k) = q\ p^{k-1} + p\ q^{k-1}.}$

b) La somme partielle :Donc $= 2-q-p=1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \mathrm{P}(X=k) &= \sum_{k=2}^{N}\left[q\ p^{k-1}+p\ q^{k-1}\right] \\
&= q\sum_{h=1}^{N-1} p^h + p\sum_{h=1}^{N-1} q^h \\
&= q\sum_{h=0}^{N-1} p^h - q + p\sum_{h=0}^{N-1} q^h - p \\
&\to q\frac{1}{1-p} - q + p\frac{1}{1-q} - p
\end{aligned}$$

car $|p|<1$ et $|q|<1$ et comme $p+q=1$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)=1}$

c) Pour $k\geq 2$, on a $|k\mathrm{P}(X=k)| = k\mathrm{P}(X=k)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} ks\acute{e}rie\mathrm{P}(X=k) &= q\sum_{k=2}^{N} k\ p^{k-1} + p\sum_{k=2}^{N} k\ q^{k-1} \\
&= q\sum_{k=1}^{N} k\ p^{k-1} - q + p\sum_{k=1}^{N} k\ q^{k-1} - p \\
&\to q\frac{1}{(1-p)^2} - q + p\frac{1}{(1-q)^2} - p
\end{aligned}$$

donc la série converge absolument, X a une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{q} - q + \dfrac{1}{p} - p$ avec

Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et que : } E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1.}$

2. a) Pour $k=2$, $(X=2)\cap(Y=1)$ signifie que l'on a effectué 2 tirages et obtenu une seule blanche (donc une seule noire)

On a donc pu avoir $N_1\cap B_2$ ou $B_1\cap N_2$ (incompatibles) et $\mathrm{P}((X=2)\cap(Y=1)) = pq+qp=2pq$

Si $k\geq 3$ alors $(X=k)\cap(Y=1)$ signifie que l'on n'a obtenu qu'une seule blanche (et plusieurs noires) et donc s'est arrêté sur une boule blanche.

$(X=k)\cap(Y=1) = N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k$ et $\mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1)) = q^{k-1}p$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}((X=2)\cap(Y=1)) = 2pq \text{ et pour } k\geq 3 : \mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1)) = q^{k-1}p}$

b) La loi de Y est une loi marginale du couple (X, Y) donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1)) \\
&= \mathrm{P}((X=2)\cap(Y=1)) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1)) \\
&= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{h=2}^{+\infty} q^h \\
&= 2pq + p\left[\sum_{h=0}^{+\infty} q^h - 1 - q\right] \\
&= 2pq + p\left[\frac{1}{1-q} - 1 - q\right] \\
&= pq + \frac{p}{p} - p = 1 - p + pq \\
&= q + pq
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y=1) = q(1+p).}$

c) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \geq 2$ quand $(Y=n)$ on a plus d'une blanche, donc on s'arrête sur une boule noire.

$(Y=n)$ signifie donc que l'on a eu n blanches puis une boule noire.

Donc $\mathrm{P}(Y=n) = p^n q$

Conclusion : $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Y=1) = q(1+p).\text{et } \mathrm{P}(Y=n) = p^n q \text{ pour } n \geq 2}$

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}(1-p+p^2)$.

3. En inversant les rôles de blanc et noir, on inverse les rôles de Y et de Z.
La loi de Z est donc la même que celle de Y en inversant les rôles de p et de q.
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} Z(\Omega) = \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Z=1) = p(1+q).\text{et } \mathrm{P}(Z=n) = q^n p \text{ pour } n \geq 2 \\ \text{et } E(Z) = \dfrac{1}{p}(1-q+q^2) \end{array}}$

4. Pour tout $k \geq 1$: $(X-1=k)$ signifie qu'il y a eu k tirages avant le changement de couleur.
Si les tirages se finissent par noir, on a alors $Y=k$ et $Z=1$ donc $Y\ Z = k$
Si les tirages se finissent par blanc, on a alors $Y=1$ et $Z=k$ donc $Y\ Z=k$ et donc dans tous les cas,
Conclusion : $\boxed{Y\ Z = X-1}$

5. Y et Z ont une espérance.
X a une espérance donc $X-1$ et $Y\ Z$ également $E(Y\ Z) = E(X)-1$
Donc (Y, Z) admet une covariance et $\mathrm{cov}(Y,Z) = E(Y\ Z) - E(Y)\,EZ$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{cov}(Y,Z) = E(X) - E(Y)\,E(Z) - 1}$