

Exercice I

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

- On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

$$1. \text{ On a : } AFA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4H$$

$$AGA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4G + 12H$$

$$AHA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 4F + 6G + 9H$$

2. Les matrices symétriques d'ordre 2 sont celles du type $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aF + bG + cH$ avec a, b, c réels.

donc $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(F, G, H)$ est une sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(F, G, H) en est une famille génératrice.

Si $aF + bG + cH = 0$ alors $a = b = c = 0$ donc cette famille est libre.

Conclusion : $\boxed{(F, G, H) \text{ est une base de } \mathcal{S}_2 \text{ et donc } \dim(\mathcal{S}_2) = 3}$

On note u l'application qui à toute matrice S de $\mathcal{S}_2$ associe la matrice $u(S) = ASA$

3. a) On réexploite l'idée du 2. :

$$\text{Soit } S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2 \text{ alors } u(S) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c & 4b + 6c \\ 4b + 6c & 4a + 12b + 9c \end{pmatrix}$$

qui est bien symétrique.

Conclusion : $\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_2, u(S) \in \mathcal{S}_2}$

- b) u est donc une application de $\mathcal{S}_2$ dans $\mathcal{S}_2$
et pour $S, T \in \mathcal{S}_2$ et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(xS + yT) &= A(xS + yT)A \\ &= xASA + yATA \\ &= xu(S) + yu(T) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{u \text{ est une endomorphisme de } \mathcal{S}_2}$

- c) On remarque que $AFA = 4H = 0F + 0G + 4H$ donc $u(F)$ a pour coordonnées $(0, 0, 4)$ dans la base (F, G, H)

De même $AGA = 4G + 12H$ et $AHA = 4F + 6G + 9H$

Donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (F, G, H)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix} = M$ (rassurant)

Conclusion : bien calibré

Partie II : réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(M + 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ 8y + 6z = 0 \\ 4x + 12y + 13z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{3}{4}z \\ 0z = 0 \end{cases}$$

$(0, 0, 0)$ n'est pas la seule solution donc -4 est valeur propre et le sous espace associé est $\text{Vect}(-1, -\frac{3}{4}, 1)$

$$(M - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x + 4z = 0 \\ 3y + 6z = 0 \\ 4x + 12y + 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4z \\ y = -2z \\ 0z = 0 \end{cases}$$

donc 1 est valeur propre et le sous espace associé est $\text{Vect}(4, -2, 1)$

$$(M - 16I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -16x + 4z = 0 \\ -12y + 6z = 0 \\ 4x + 12y - 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ 0z = 0 \end{cases}$$

donc 16 est valeur propre et le sous espace associé est $\text{Vect}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$

Comme M est une matrice d'ordre 3 qui possède 2 valeurs propres distinctes

Conclusion : M est donc diagonalisable

2. $-4(-1, -\frac{3}{4}, 1) = (4, 3, -4)$ est associé à -4

$(4, -2, 1)$ est associé à 1

$4(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1) = (1, 2, 4)$ est associé à 16

La juxtaposition de ces 3 vecteurs propres $((4, 3, -4), (4, -2, 1), (1, 2, 4))$ associé aux 3 valeurs propres forme donc une base de vecteurs propres.

Et avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ on a $M = PDP^{-1}$

3. On a $D + 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $D - I = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ et $D - 16I = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $(D + 4I)(D - I)(D - 16I) = 0$

4. On développe

$$\begin{aligned} (D + 4I)(D - I)(D - 16I) &= (D^2 + 3D - 4I)(D - 16I) \\ &= D^3 - 13D^2 - 52D + 64I \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $D^3 = 13D^2 + 52D - 64I$ et $PD^3P^{-1} = P(13D^2 + 52D - 64I)P^{-1}$

Conclusion : $M^3 = 13M^2 + 52M - 16I$

5. L'application linéaire associée à M dans la base (F, G, H) est u^3

Celle associée à $13M^2 + 52M - 16I$ est $13u^2 + 52u - 16e$ et comme ces deux matrices sont égales, les applications linéaires associées le sont aussi.

Conclusion : $u^3 = 13u^2 + 52u - 16$

Bilan : trouver la bonne base demande de la finesse.

Exercice 2

1. On note f définie pour tout x réel par , $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Partie I : Etude et tracé de $\mathcal{C}$

1. a) Comme $1+x^2 > 0$ pour tout x réel, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} > 0$$

sur $\mathbb{R}^*$

- b) Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- c) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (en partant de l'expression développée)

$$f''(x) = -2 \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = -2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

2. En $-\infty$: $f(x) = x - \ln(1+x^2) \rightarrow +\infty$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln(1+x^2) \\ &= x \left[1 - 2 \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{x} \right] \\ &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

3. A partir de cette factorisation

en $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - 2 \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{x} \rightarrow 1$$

et $f(x) - 1x = -\ln(1+x^2) \rightarrow -\infty$

Conclusion : Il y a une branche parabolique de direction $y = x$ en $+\infty$

En $-\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= 1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 1 - \frac{\ln(x^2(1+1/x^2))}{x} \\ &= 1 - 2 \frac{\ln(-x)}{x} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{x} \\ &= 1 - 2 \frac{\ln(-x)}{-x} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{x} \\ &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

car $\ln(X) = o(X)$ quand $X = -x \rightarrow +\infty$

Donc $f(x)/x \rightarrow 1$ et $f(x) - x = -\ln(1+x^2) \rightarrow -\infty$

Conclusion : Il y a une branche parabolique de direction $y = x$ en $+\infty$

4. Comme f est deux fois dérivable, $f''(x) = 2 \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ on a donc

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

et

Conclusion : $\mathcal{C}$ a deux points d'inflexion en $(-1, -1 - \ln(2))$ et en $(1, 1 - \ln(2))$

5. Il convient de reporter les points d'inflexion avec leurs tangentes de pente : $f'(-1) = 2$ et $f'(1) = 0$
 Le point d'abscisse 0 n'était pas dans l'étude, mais demandé. $(0, 0)$ et pente $f'(0) = 1/2$
6. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 x f(x) dx &= \int_0^1 x (x - \ln(1 + x^2)) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx\end{aligned}$$

On utilise le changement de variable $t = 1 + x^2$ aux bornes : $x = 0 \iff t = 1$ et $x = 1 \iff t = 2$

Le sens simple $x = \sqrt{t-1}$ du changement de variable (l'ancienne en fonction de la nouvelle) n'est pas dérivable en $t = 1$

Donc directement : $dt = 2x dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx &= \int_0^1 2x \frac{\ln(1 + x^2)}{2} dx = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} [t \ln(t) - t]_1^2 = \frac{1}{2} [2 \ln(2) - 2 + 1] \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^1 x f(x) dx = \frac{5}{6} - \ln(2)}$

Partie II : Etude d'une suite et d'une série associée à f

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) - x = -\ln(1 + x^2) \leq 0$ car $1 + x^2 \geq 1$

En particulier, $f(u_n) \leq u_n$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

(Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, une démonstration par récurrence fonctionne très bien)

2. On prouve que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0$:

$u_0 = 1 \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$ alors $f(u_n) \geq f(0) = 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$ et par récurrence

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0}$

La suite u est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ qui est donc un point fixe. Et $f(\ell) = \ell$

Or $f(x) = x \iff \ln(1 + x^2) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite converge vers } 0}$

3. On calcul les valeurs de u_n et de n jusqu'à ce que u_n soit inférieur à 10^{-3}

```
var u :real ; n :integer ;
begin
  u :=1 ; n :=0 ;
```

```

repeat
    u := u - ln(1+u*u) ;
    n := n+1 ;
until u <= 1E-3 ;
writeln(n) ;
end.

```

4. a) On étudie la différence $g(x) = f(x) - x + \frac{1}{2}x^2$
 g est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$g'(x) = -\frac{2x}{1+x^2} + x = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1}$$

x	0	1
$g'(x)$	0	—
$g(x)$	0	$\searrow$ —

et donc $g(x) \leq 0$ et

Conclusion : $\forall x \in [0, 1] : f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$

- b) On l'applique avec u_n , mais il faut au préalable vérifier l'hypothèse
 Comme $u_0 = 1$ et que la suite est décroissante minorée par 0 alors, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \in [0, 1]$:
 Donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$

- c) La série $\sum u_n^2$ étant à termes positifs, on étudie la convergence de la série majorante :
 $\sum_{n=0}^N u_n - u_{n+1} = u_0 - u_{N+1} \rightarrow u_0$ car $u_N \rightarrow 0$
 Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n - u_{n+1}$ est convergente et par majoration de termes positifs,

Conclusion : La série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge

Bilan : brodé sur un schéma classique, il demande d'être autonome.

Parti III Etude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

$$F(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$$

1. Comme $(x, y) \rightarrow x + y$ est C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ alors F est C^1 sur $\mathbb{R}^2$
 comme composée et somme de fonctions C^1

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= f'(x + y) - f'(x) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= f'(x + y) - f'(y) \end{aligned}$$

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2}$ donc

$$\begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ \frac{2(x+y)}{1+(x+y)^2} = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases},$$

$\iff \begin{cases} x(1+y^2) = y(1+x^2) \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases}$ et là, pour la première ligne, il faut se dire que si $x = y$, on a une solution, et donc chercher à factoriser par $(x - y)$

$$\iff \begin{cases} x + xy^2 - y - yx^2 = (x - y)(1 - xy) = 0 \\ (x + y)(1 + x^2) = x(1 + (x + y)^2) \end{cases}$$

Donc ou bien

$$\begin{cases} x = y \\ 2y(1 + y^2) = y(1 + 4y^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y(1 - 2y^2) = 0 \end{cases} \text{ dont les solutions sont } (0, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ou bien $y \neq 0$ et

$$\begin{cases} x = 1/y \\ \left(\frac{1}{y} + y\right)\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y}\left(1 + \left(\frac{1}{y} + y\right)^2\right) \end{cases} : (E) \quad :$$

avec

$$\begin{aligned} (E) &\iff \frac{1}{y^3} + \frac{2}{y} + y = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y^2} + y^2 + 3\right) \\ &\iff \frac{2}{y} = \frac{3}{y} \end{aligned}$$

qui n'a pas de solutions.

Conclusion : Les solutions sont $(0, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$(x, y) \text{ est un point critique} \iff \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x + y) - f'(x) = 0 \\ f'(x + y) - f'(y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x + y) = f'(x) \end{cases}$$

Conclusion : Les points critiques de F sont $(0, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. F est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x + y) - f''(x)$$

$$s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = f''(x + y)$$

$$t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f''(x + y) - f''(y)$$

$$\text{avec } f''(x) = 2 \frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2}$$

– en $(0, 0)$: $r = 0$: $s = -2$: $t = 0$ donc $rt - s^2 < 0$ et il n'y a pas d'extremum local en $(0, 0)$

– en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $r = 2 \frac{2 - 1}{(1 + 2)^2} - 2 \frac{\frac{1}{2} - 1}{(1 + \frac{1}{2})^2} = 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{3} = t$ et $s = \frac{2}{9}$

donc $rt - s^2 = \frac{4}{9} - \frac{4}{81} > 0$ et F a un extremum local en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ qui est un minimum car $r > 0$

– Comme tous les termes sont au carré, on a le même résultat en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

F a un extremum local en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ qui est un minimum.

Bilan : calculs infaisables pour les candidats, dans le temps imparti

Exercice 3

Partie I

1. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ donc $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X_1 = k) = q^{k-1}p$ et $E(X_1) = \frac{1}{p}$ et $V(X_1) = \frac{q}{p^2}$
2. $(\Delta = 0) = (X_1 = X_2) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X_1 = k \cap X_2 = k)$ (incompatibles) donc

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = k) \text{ indépendants} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)} p^2 \text{ réindexé } h = k - 1 \\ &= p^2 \sum_{h=0}^{+\infty} q^{2h} \text{ avec } |q^2| < 1 \\ &= \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p^2}{(1 - q)(1 + q)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P(X_1 = X_2) = \frac{p}{1 + q}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- a) $(X_1 - X_2 = n) = \bigcup_k (X_2 = k \cap X_1 = n + k)$ avec comme contraintes $k \in \mathbb{N}^*$ et $n + k \in \mathbb{N}^*$ soit

$$\begin{aligned} (X_1 - X_2 = n) &= \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X_2 = k \cap X_1 = n + k) \text{ donc} \\ P(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = n + k) \end{aligned}$$

- b) Somme que l'on calcule :

$$\begin{aligned} P(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p q^{n+k-1} p = p^2 q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)} \\ &= p^2 q^n \frac{1}{1 - q^2} \text{ car } |q^2| < 1 \\ &= \frac{p^2 q^n}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{pq^n}{1 + q} \end{aligned}$$

Or $|X_1 - X_2| = n \iff X_1 - X_2 = n$ ou $X_1 - X_2 = -n$ (incompatibles)
avec $X_1 - X_2 = -n \iff X_2 - X_1 = n$ qui, par symétrie des rôles de X_1 et X_2 , aura donc la même probabilité

Finalement $P(|X_1 - X_2| = n) = P(X_1 - X_2 = n) + P(X_1 - X_2 = -n)$

Conclusion : $\boxed{P(\Delta = n) = 2 \frac{pq^n}{1 + q}}$

4. a) La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n P(\Delta = n)$ est à termes positifs donc l'absolue convergence équivaut à la convergence simple.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N nP(\Delta = n) &= 0 + \sum_{n=1}^N 2n \frac{pq^n}{1+q} = 2 \frac{p}{1+q} \sum_{n=1}^N nq^n \\ &\rightarrow 2 \frac{p}{1+q} \frac{q}{(1-q)^2} = 2 \frac{1}{1+q} \frac{q}{(1-q)}\end{aligned}$$

Conclusion : Donc Δ a une espérance et $E(\Delta) = 2 \frac{q}{1-q^2}$

b) On a :

$$\begin{aligned}E((X_1 - X_2)^2) &= E(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2) \\ &= E(X_1^2) - 2E(X_1X_2) + E(X_2^2) \text{ indépendantes} \\ &= E(X_1^2) - 2E(X_1)E(X_2) + E(X_2^2)\end{aligned}$$

et comme X_1 et X_2 ont mêmes lois, elles ont même espérance donc

$$\begin{aligned}E((X_1 - X_2)^2) &= 2[E(X_1^2) - E(X_1)] \\ &= 2V(X_1)\end{aligned}$$

de plus $\Delta^2 = |X_1 - X_2|^2 = (X_1 - X_2)^2$ donc Δ^2 a une espérance et $E(\Delta^2) = 2V(X_1)$
 Δ a donc une variance et

$$\begin{aligned}V(\Delta) &= E(\Delta^2) - E(\Delta)^2 \\ &= 2 \frac{q}{p^2} - \left(2 \frac{q}{1-q^2}\right)^2 = 2 \frac{q}{p^2} - 4 \frac{q^2}{p^2(1+q)^2} \\ &= 2q \frac{(1+q)^2 - 2q}{p^2(1+q)^2} = 2q \frac{1+2q+q^2-2q}{p^2(1+q)^2} \\ &= 2q \frac{1+q^2}{p^2(1+q)^2}\end{aligned}$$

Conclusion : $V(\Delta) = 2q \frac{1+q^2}{p^2(1+q)^2}$

5. l'événement

$$\begin{aligned}A &= [\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)] \\ &= [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)]\end{aligned}$$

Si $X_1 \geq X_2$ alors $\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2) = X_1 - X_2 = |X_1 - X_2| = \Delta$
et si $X_1 \leq X_2$ alors $\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2) = X_2 - X_1 = |X_1 - X_2| = \Delta$

Conclusion : Finalement $A = [X_3 > \Delta]$

6. a) On décompose : $[X_3 > \Delta] = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (\Delta = k \cap X_3 > k)$ incompatibles donc

$$P(X_3 > \Delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k) P(X_3 > k)$$

car Δ défini à partir de X_1 et X_2 est indépendant de X_3

- b) Avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $P(X_3 > k) = q^k$ (on n'a que des échecs jusqu'à k)
on a donc

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(\Delta = 0) P(X_3 > 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(\Delta = k) P(X_3 > k) \\
 &= \frac{p}{1+q} 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \frac{pq^k}{1+q} q^k \\
 &= \frac{p}{1+q} + 2 \frac{p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k \\
 &= \frac{p}{1+q} \left[1 + 2q^2 \frac{1}{1-q^2} \right] \text{ car } |q^2| < 1 \\
 &= \frac{p}{1+q} \left[\frac{1-q^2+2q^2}{1-q^2} \right] \\
 &= \frac{1+q^2}{(1+q)^2}
 \end{aligned}$$

Bilan : calculs très lourds et largement répétitifs, basé sur les mêmes décompositions

Partie II

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ et X et Y indépendantes.

1. Une densité de Y est $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ avec $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$

2. On définit $Z = \frac{Y}{X}$

- a) $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
 P(Z \geq t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(X = k \cap \frac{Y}{X} \geq t\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k \cap Y \geq tk) \text{ car } k > 0 \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y \geq tk) \text{ indépendance}
 \end{aligned}$$

- b) Or $P(Y \geq t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$ donc, pour tout $t \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 P(Z \geq t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p \cdot e^{-\lambda tk} \\
 &= \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} (qe^{-\lambda t})^k \\
 &= \frac{p}{q} qe^{-\lambda t} \frac{1}{1 - qe^{-\lambda t}} \text{ car } |qe^{-\lambda t}| < 1 \\
 &= \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P(Z \geq t) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}}$

c) la fonction G de répartition de Z est donc donnée par $G(t) = 1 - \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}$ si $t \geq 0$

Erreur : merci à Sebastien Guffroy.

On a $G(t) = P(Z \leq t) = 1 - P(Z > t)$ alors que c'est $P(Z \geq t)$ qui a été calculée.... Et ce n'est qu'une fois que l'on sait que Z est à densité que l'on peut affirmer l'égalité de ces deux probabilités.

Or $P(X = k \cap Y = tk) = P(X = k)P(Y = tk) = 0$ donc (probabilités totales) $P(Z = t) = 0$ et $P(Z \geq t) = P(Z > t)$

Et comme $P(Y < 0) = 0$ alors $P(Z < 0) = 0$ et $G(t) = 0$ si $t < 0$

La fonction G est donc continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$ (quotient de fonctions continues car $1 - qe^{-\lambda t} \neq 0$)

En $t < 0$: $G(t) = 0 \rightarrow 0$ et $G(0) = 1 - \frac{p}{1 - q} = 0$ donc G est continue en 0^-

Donc G est continue sur $\mathbb{R}$

Elle est de plus C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Conclusion : $\boxed{Z \text{ est à densité}}$

Pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} G'(t) &= -p \frac{-\lambda e^{-\lambda t} (1 - qe^{-\lambda t}) - \lambda q e^{-\lambda t} e^{-\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} p \frac{1 - qe^{-\lambda t} + qe^{-\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t} p}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} \end{aligned}$$

Une densité de Z est $g(t) = G'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda t} p}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Bilan : revient à de grands classiques