Exercice 1

On considère l'application

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Pour tout x de $]0;+\infty[$, $x > 0$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln(x))\, e^{x-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1} \end{aligned}$$

2. Soit $g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$
g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (car $x > 0$ et $x \neq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$)

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

donc

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	affine
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

et donc $g(x) \geq 1 > 0$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0}$

3. on a donc pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + 1 + x > 0$$

car $1 + x \geq 0$
Conclusion : $\boxed{x \in]0,+\infty[\quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.}$

4. On a donc $f'(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$ *Conclusion :* $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[}$

5. En 0 : $f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1} \to -\infty$
En $+\infty$: $f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1} \to +\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

et $f'(1) = 3$ pente de la tangente en 1.

6. En 0 : $f(x) \to -\infty$ et on a donc une asymptote verticale
En $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{(x + \ln x)\, e^{x-1}}{x} \\ &= \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) e^{x-1} \\ &\to +\infty \end{aligned}$$

car $\ln(x) = o(x)$ et on a donc une branche parabolique verticale en $+\infty$.

7. Au vu des 2 branches infinies, on peut prédire au moins un point d'inflexion qu'il serait intéressant de rechercher (changement de signe de f'') :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1} \\ &= \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1 + x + \ln(x)\right) e^{x-1} \end{aligned}$$

mais l'étude du signe de cette quantité est par trop rébarbative !
Bilan : mise en jambe paisible

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
On va recycler les propriétés de f pour étudier cette suite.

1. Par récurrence :
   $u_0 = 2$ existe et $u_0 \geq 2$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \geq 2$
   Alors $u_n > 0$et $f(u_n)$ est donc calculable (définie)
   Et comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que u_n et 2 en sont éléments, $f(u_n) \geq f(2) = (2 + \ln(2)) \cdot e \geq 2$ car $\ln(2) \geq 0$
   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geq 2}$
2. Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $u_0 \geq e^0$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq e^n$ alors le moyen naturel est :
   $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(e^n)$ mais $f(e^n) = (e^n + \ln(e^n))\, e^{e^n - 1}$ ne donne pas directement le e^{n+1}
   On recycle donc la question précédente :
   $f(u_n) = (u_n + \ln(u_n))\, e^{u_n - 1}$ avec
   - $\ln(u_n) \geq \ln(2)$ donc $u_n + \ln(u_n) \geq u_n \geq e^n$
   - et $u_n - 1 \geq 1$ donc $e^{u_n-1} \geq e^1$
   - d'où $f(u_n) \geq e^n e = e^{n+1}$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n \text{ et par minoration } u_n \to +\infty,}$
3. On calcule u_n et n tant que $u_n < 10^{20}$ (ou jusqu'à ce que $u_n \geq 10^{20}$ puisque ce n'est pas pour u_0 que cela se produit)

```
program premier ;
var n :intreger ; u :real ;
begin
     u :=2 ;n :=0 ;
     while u<1E20 do
     begin u :=(u+ln(u))*exp(u-1) ; n :=n+1 end ;
     writeln(n) ;
end.
```

Bilan : un peu d'astuce requise pour le 2

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

1. f est continue sur $]0;+\infty[$ donc F est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

On considère l'application de classe C^2

$$G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

2. On a, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$

$$\begin{aligned} G'_x(x,y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = F'(x) - 2\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \\ &= f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} \\ G'_y(x,y) &= f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} \end{aligned}$$

3. a) f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc bijective de $]0;+\infty[$ dans $]\lim_0 f;\lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$

   b) Pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} G'_x(x,y)=0 \\ G'_y(x,y)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} f(x) = f(y) \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{array}\right.$ et comme f est bijective sur $]0;+\infty[$ *et* que x et y en sont éléments,

   $\iff \left\{\begin{array}{c} x=y \\ f(y) - e^y = 0 \end{array}\right.$

   on résout alors cette seconde équation

$$\begin{aligned} f(y) - e^y = 0 &\iff (y + \ln(y))\, e^{y-1} - e^y = 0 \\ &\iff (y+\ln(y))\, e^{-1} - 1 = 0 \\ &\iff y + \ln(y) = e \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{(x,y) \in]0;+\infty[^2 \text{ est un point critique de } G \text{ si et seulement si } x=y \quad \text{et} \quad x+\ln x = e.}$

4. On peut appliquer le théorème de bijection sur $]0;+\infty[$ puis vérifier que $1<\alpha<e$ en comparant les images, ou plus rapidement :
   Soit $k(x) = x + \ln(x)$. k est somme de deux fonctions strictement croissante, donc
   k est continue et strictement croissante sur $]1;e[$ donc bijective de $]1;e[$ dans $]\lim_1 k;\lim_e k[=]1;e+1[$
   et comme $e \in]1;e+1[$ alors l'équation $k(x) = e$, admet une unique solution dans $]1;e[$.
   et comme k est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle n'en a pas d'autres.

   Conclusion : $\boxed{x + \ln(x) = e \text{ a une unique solution } \alpha \text{ sur }]0;+\infty[\text{ et } 1<\alpha<e}$

5. G a donc un unique point critique (α, α) sur l'ouvert $]0;+\infty[$
   Reste à tester $rt - s^2 > 0$:
   On a, pour tout $(x, y) \in]0;+\infty[^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) &= f'(x) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x,y) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) &= f'(y) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \end{aligned}$$

   et en (α, α) :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\alpha,\alpha) = f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^{\alpha} \\ s &= -\frac{1}{2}e^{\alpha} \\ t &= f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^{\alpha} \end{aligned}$$

   On simplifie l'expresion de $f'(\alpha)$ en tenant compte du fait que $\alpha + \ln(\alpha) = e$:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \alpha + \ln(\alpha)\right) e^{\alpha - 1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + e\right) e^{\alpha - 1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha - 1} + e^{\alpha} > e^{\alpha} \text{ et donc} \end{aligned}$$

$$f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^{\alpha} > \frac{1}{2}e^{\alpha}$$

   et on a donc $rt - s^2 > 0$
   Conclusion : G a un extremum local unique en (α, α) sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ et comme $r > 0$, c'est un minimum

Bilan : sans gros calcul si l'on a de l'élégance.
Balaye bien le programme d'analyse.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Détermination d'une racine carrée de A

1. A est symétrique donc diagonalisable et comme elle a deux colonnes identiques, elle est non inversible.

Le rang de A (hors programme) est la dimension de l'image de l'application f associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Son image est engendrée par $((1,1,1),(1,1,1),(1,1,3))$ donc par $((1,1,1),(1,1,3))$.

Cette famille étant libre (2 vecteurs non proportionnels) , elle est une base de l'image et donc $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$

Donc le rang de A est égal à 2.

2. Comme A ne peux pas avoir plus de trois valeurs propres distinctes, il suffit de les tester pour être sûr de les avoir toutes :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A-0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x+y+z=0 & \\ x+y+z=0 & L_2-L_1 \\ x+y+3z=0 & L_3-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 & \\ z=0 & L_3-L_1 \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$ (en paramètrant par x pour avoir la première ligne de P égale à 1)

Donc 0 est valeur propre de A et le sous espace propre associé est $E_0 = \operatorname{Vect}((1,-1,0))$

$$(A-1I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-x \\ y=x \\ 0=0 \end{cases}$$

Donc 1 est valeur propre de A et le sous espace propre associé est $E_1 = \operatorname{Vect}((1,1,-1))$

$$(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -3x+y+z=0 & L_1+L_3 \\ x-3y+z=0 & L_2+L_3 \\ x+y-z=0 & \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+2y=0 \\ 2x-2y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} y=x \\ z=2x \end{cases}$ donc 4 est valeur propre de A et le sous espace propre associé est $\operatorname{Vect}((1,1,2))$

Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

3. A ayant trois valeurs propres distinctes, la juxtaposition de vecteurs propres associés à $0,1$ et 4 : $((1,-1,0),(1,1,-1),(1,1,2))$ est une base de vecteurs propres.

Donc avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (première ligne formée de 1) matrice de passage donc inversible on a $A = PDP^{-1}$.

4. Par la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 \\ L_1+L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2/2 \to L_1 \\ L_2/2 \to L_2 \\ L_3 + L_2/2 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 \\ L_2 - L_3/3 \to L_2 \\ L_3/3 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 \\ L_2 - L_3/3 \to L_2 \\ L_3/3 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et donc}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}}$

5. L'unicité n'étant pas demandée, pour montrer l'existence de Δ, il suffit de la donner et vérifier qu'elle convient :
   Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Elle vérifie bien les trois contraintes : diagonales, coefs diagonaux croissants et carré égal à D.
6. On note $R = P\Delta P^{-1}$. On a alors $R = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$

$$\begin{array}{cccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \\ P\Delta P^{-1} = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 5/3 \end{pmatrix} = R \end{array}$$

   Et on prend le temps de vérifier que $R^2 = A$ ...

Bilan : rang d'une matrice HP. classique, les calculs ne sont pas trop lourds

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et R.
On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

1. On a $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P$
   Donc, d'après la formule de changement de base $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P^{-1}AP = D$
   et de même $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(g) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g)\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P^{-1}RP = \Delta$
2. a) $\ker(f)$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 0
      Donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$ et comme $((1,-1,0))$ est libre (un vecteur non nul) elle forme une base de $\ker(f)$ et $\dim\ker(f) = 1$
   b) Le théorème du rang donne alors $\dim \mathrm{Im}(f) = 3 - 1 = 2$
      Et comme $f(e_1) = (1,1,1)$ première colonne de A et $f(e_3) = (1,1,3)$ forment une famille libre (2 vecteurs non proportionnels) de $\mathrm{Im}(f)$, ils forment une base de $\mathrm{Im}(f)$
3. En inversant l'ordre des questions a) et b) :
   $(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(g)$ et comme $g(e_1) = (2/3, 2/3, 1/3) = g(e_2)$ alors $(g(e_1), g(e_3))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(g)$, et de plus libre.
   Conclusion : $\boxed{(g(e_1), g(e_3)) \text{ est donc une base de } \mathrm{Im}(g) \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(g)) = 2}$
   Par le théorème du rang, $\dim(\ker(g)) = 1$ et on constate que $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   donc $g((1,-1,0)) = 0$
   Donc $((1,-1,0))$ est une famille libre de 1 vecteur de $\ker(g)$
   Conclusion : $\boxed{((1,-1,0)) \text{ est une base de } \ker(g) \text{ et } \dim\ker(g) = 1}$

4. La relation $g = f \circ h$. est équivalente à l'égalité de leurs matrices dans $\mathcal{C}$: $\text{mat}_{\mathcal{C}}\, g = \text{mat}_{\mathcal{C}}\, f \circ h = \text{mat}_{\mathcal{C}}\, f\, \text{mat}_{\mathcal{C}}\, h$.
   On cherche donc une matrice H, inversible pour que h soit un automorphisme, telle que $\Delta = DH$
   Pour rester dans l'esprit du sujet, on cherche H diagonale :
   $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ qui est inversible convient.
   Et l'application linéaire h associée à H dans $\mathcal{C}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g = f \circ h$.
   Sa matrice dans $\mathcal{B}$ (puisqu'elle est demandée) est alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(h) = PHP^{-1}$ d'après la formule de changement de base.

Bilan : la dimension de Im(f) aurait pu être demandé en premier. Et dans la question 3, l'ordre inverse aurait été le bienvenu !
Avec un peu d'originalité pour finir... exercice complet sur l'algèbre.

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.
Soit $p \in]0;1[$. On note. $q = 1 - p$

Partie I Différence de deux variables aléatoires.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit. la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. X (qui ne s'intéresse qu'au premier essai) est le nombre de joueurs, parmi n, atteignant la cible au premier essai, indépendamment les uns des autres et avec une même probabilité p.
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \text{ et } E(X) = np,\ V(X) = npq.}$
2. Pour chaque joueur, la probabilité de ne pas atteindre la cible (E_i pour échec au $i^{ème}$ essai) est $\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \mathrm{P}(E_1)\,\mathrm{P}(E_2) = q^2$ par indépendance.
   Donc la probabilité de l'atteindre au moins une fois est $\mathrm{P}\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = 1 - q^2$ et comme précédemment,
   Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-q^2),\ E(Z) = n(1-q^2) \text{ et } V(Z) = nq^2(1-q^2)}$

On note $Y = Z - X$.

3. Y est donc le nombre de joueur atteignant au moins une fois la cible, mais pas la première fois : C'est le nombre de ceux l'atteignant uniquement la seconde fois.
   Pour chaque joueur, la probabilité en est $\mathrm{P}(E_1 \cap S_2) = \mathrm{P}(E_1)\,\mathrm{P}(S_2) = pq$ par indépendance.
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq).}$
4. a) X et Y ne sont pas indépendantes :
   $(X = n \cap Y = n)$est impossible donc $\mathrm{P}(X = n \cap Y = n) = 0 \neq \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y = n)$

b) Calculer la covariance du couple (X,Y). ? ? ? par quel bout prendre la question ?
Si on part de la définition $\text{cov}(X,Y) = E(X)E(Y) - E(XY)$ demande d'aller chercher la loi du couple pour obtenir $E(X,Y)$: laborieux.
On cherche donc la covariance là où elle intervient :$V(Z) = V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\,\text{cov}(X,Y)$ donc

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(V(Z) - V(Y) - V(X)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(nq^2\left(1-q^2\right) - npq\,(1-pq) - npq\right) \text{ factorisé} \\
&= \frac{1}{2}nq\left(q(1-q)(1+q) - p(1-pq) - p\right) \\
&= \frac{1}{2}nqp\left(q(1+q) - 1 + pq - 1\right) \text{ tout en } q \\
&= \frac{1}{2}nqp\left(q + q^2 - 2 + (1-q)\,q\right) \\
&= -np^2q
\end{aligned}$$

N.B. la covariance négative est cohérente : plus X est grand, plus Y risque d'être petit.

Bilan : début nécessitant de comprendre les notations, et fin subtile.

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. **N.B.** Pour donner la loi, ne pas oublier de donner les valeurs possibles.
On a $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}(U=n) = q^{n-1}p$, $E(U) = \dfrac{1}{p}$ et $V(U) = \dfrac{q}{p^2}$

On considère une variable aléatoire T telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}(T>t) = e^{-nt}$

2. a) $(U=n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T>t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{(U=n)}(T>t)\,\mathrm{P}(U=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}q^{n-1}p \text{ pour } t \in [0;+\infty[\\
&= \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t}q\right)^n \\
&= \frac{p}{q}e^{-t}q\frac{1}{1-e^{-t}q} \text{ car } \left|e^{-t}q\right| < 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}(T>t) = \dfrac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}}$

b) La fonction de répartition de T est donc donnée par :
$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \dfrac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}$ pour tout $t \geq 0$
et comme F (fonction de répartition) est croissante et positive et que $F(0) = 1 - \dfrac{p}{1-q} = 0$
alors $F(t) = 0$ pour tout $t < 0$

c) F est donc continue

- sur $[0;+\infty[$ car $1-q\ e^{-t}\neq 0$
- sur $]-\infty,0[$ fonction nulle
- en 0^- car $F(t)=0\to 0=F(0)$

Donc la fonction de réapartiton de T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et T est à densité.
Une densité est F' là où F est C^1
pour $t>0$: $F(t)=1-\dfrac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}$ et

$$\begin{aligned}F'(t)&=-p\frac{-e^{-t}\left(1-qe^{-t}\right)-qe^{-t}e^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2}\\&=\frac{pe^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}T \text{ est à densité et une densité est}\\ f(t)=\begin{cases}\dfrac{pe^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2} & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}\end{array}}$

3. On note $Z=UT$

a) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall z\in[0;+\infty[,$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{(U=n)}(Z>z)&=\mathrm{P}_{(U=n)}(UT>z)\\&=\mathrm{P}_{(U=n)}(T>z/n)\\&=e^{-nz/n}\\&=e^{-z}\end{aligned}$$

b) Intuitivement : la probabilité $\mathrm{P}_{(U=n)}(Z>z)$ est la même pour toute valeur de U : elle est "indépendante" de U et $\mathrm{P}(Z>z)=e^{-z}$.
Rigoureusement, on repasse par les probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z>z)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(U=n)\,\mathrm{P}_{(U=n)}(Z>z)\\&=e^{-z}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(U=n)\\&=e^{-z}\text{ car }\ (U=n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{SCE}\end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est donc
$G(z)=\begin{cases}1-e^{-z} & \text{si } z\geq 0\\ 0 & \text{si } z<0\end{cases}$ où l'on reconnaît que $\boxed{Z \text{ suit une loi } \varepsilon(1)}$

c) On retrouve ici la problématique de l'indépendance :
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall z\in[0;+\infty[,$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U=n\ ,\ Z>z)&=\mathrm{P}(U=n)\,\mathrm{P}_{U=n}(Z>z)\\&=\mathrm{P}(U=n)\,e^{-z}\\&=\mathrm{P}(U=n)\,\mathrm{P}(Z>z)\end{aligned}$$

Bilan : joli exercice