Corrigé EML Eco 2011 par Pierre Veuillez

EXERCICE 1

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I : Étude de la matrice B

1. N.B. à voire la question suivante B va être diagonalisable !
   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
   $(B - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (2-\alpha)\, x + 2y = 0 \\ x + (3-\alpha)\, y = 0 \end{cases}$
   $\iff (1) \begin{cases} [-(3-\alpha)(2-\alpha) + 2]\, y = 0 \\ x = -(3-\alpha)\, y = 0 \end{cases}$
   $[-(3-\alpha)(2-\alpha) + 2] = -\alpha^2 + 5\alpha - 4$ (et on voit le polynome annulateur juste en dessous !)
   qui a pour racines : $\alpha = 1$ et $\alpha = 4$ donc
   - si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 4$ alors (1) $\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ donc n'est pas valeur propre.
   - Si $\alpha = 1$ alors (1) $\iff x = -2y$ et 1 est valeur prore associée au sous espace propre $\mathrm{Vect}\left((-2, 1)\right)$
   - Si $\alpha = 4$ alors (1) $\iff x = y$ et 4 est valeur prore associée au sous espace propre $\mathrm{Vect}\left((1, 1)\right)$

   Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } B \text{ sont donc 1 et 4.}}$

   Comme B est une matrice d'ordre 2 avec 2 valeurs propres disctinctes, $\boxed{\text{elle est diagonalisable.}}$
2. Comme $(-2, 1)$ est vecteur propre associé à 1, alors $\frac{-1}{2}(-2, 1) = (1, -1/2)$ également. (première ligne de P)
   et (condition suffisante) La juxtapositon $((1, -1/2), (1, 1))$ est donc une base de vecteurs propres.
   Donc avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ inversible on a $B = PDP^{-1}$
3. Comme D est diagonale, on a $D^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}$ et $5D - 4I = \begin{pmatrix} 5-4 & 0 \\ 0 & 20-4 \end{pmatrix} = D^2$
   On a alors $B^2 = PD^2P^{-1} = 5PDP^{-1} - 4PIP^{-1} = 5B - 4I$ combinaison linéaire de B et de I.
4. $B^2 = 5B - 4I$ donc $I = -\dfrac{1}{4}\left(B^2 - 5B\right) = -\dfrac{1}{4}(B - 5I)\, B$

   Conclusion : $\boxed{B \text{ est inversible et } B^{-1} = -\dfrac{1}{4}(B - 5I)}$

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\quad h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto h(M) = AMB.$

1. h est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (produit de matrice 2x2)
   Pour tout M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α etβ réels.

$$
\begin{aligned}
h(\alpha M+\beta N) &= A(\alpha M+\beta N)B \\
&= \alpha AMB+\beta ANB \\
&= \alpha h(M)+\beta h(N)
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{h \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,.}$

2. Les angles d'attaque ici sont multiples pour la bijection ($\ker(h)$, matrice associée, 0 valeur propre...). Mais pour obtenir h^{-1}, le choix se restrient à :
Pour tout M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$
\begin{aligned}
h(M)=N &\iff AMB=N \\
&\iff M=A^{-1}NB^{-1}
\end{aligned}
$$

car A est inversible (triangulaire sans terme nul sur la diagonale)

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc } h \text{ est bijective et pour tout } N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ h^{-1}(N)=A^{-1}NB^{-1}\end{array}}$

3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.

   a) Soient $\lambda\in\mathbb{R},\ \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $N=MP$, ou P est la matrice définie dans la question **I2.**
   on a donc $M=NP^{-1}$

$$
\begin{aligned}
h(M)=\lambda M &\iff AMB=\lambda M \\
&\iff ANP^{-1}B=\lambda NP^{-1} \\
&\iff ANP^{-1}BP=\lambda N \\
&\iff AND=\lambda N
\end{aligned}
$$

   où D est la matrice définie dans la question **I2.**

   b) Soit $N=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}$
   $A\ N\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t\end{pmatrix}$
   et $\lambda N=\lambda\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda x \\ \lambda z & \lambda t\end{pmatrix}$
   Donc $A\ N\ D=\lambda N \iff \left\{\begin{array}{c} x=\lambda x \\ 4y=\lambda y \\ -z=\lambda z \\ -4t=\lambda t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} (1-\lambda)x=0 \\ (4-\lambda)y=0 \\ (-1-\lambda)z=0 \\ (-4-\lambda)t=0\end{array}\right.$
   Donc il existe une matrice N nonnulle si et seulement si $\lambda=1,\ -1,\ 4$ ou -4

   c) Donc, avec $M=NP$, $h(M)=\lambda M\iff AND=\lambda N$ aura des solutions non nulle sous les même conditions.
   Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } h \text{ sont } 1,\ -1,\ 4 \text{ et } -4}$
   et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, l'endomorphisme h qui apossède 4 valeurs porpes distinctes et donc diagonalisable.

   Dans une base de matrices propres (associées dans cet ordre) , sa matrice sera $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=$

   Δ

d) On note e l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans la base de matrices propres précédentes, la matrice de $(h-e)\circ(h+e)\circ(h-4e)\circ(h+4e)$ est :

$$\begin{aligned}
&(\Delta - I)(\Delta + I)(\Delta - 4I)(\Delta + I)\\
=& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
=& 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(h-e)\circ(h+e)\circ(h-4e)\circ(h+4e)=0.}$

EXERCICE 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$définie, pour tout $t \in [0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. f est continue sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues.
   En, 0 : $f(t) = t\ln(t) \to 0 = f(0)$ (usuelle).
   Attention ! par croissance comparée il faut un quotient : $f(t) = \frac{\ln(t)}{1/t} \to 0$ car $\ln(t) = 0(1/t)$
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } [0;+\infty[.}$
2. f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ comme produit de foncitons C^1
   Conclusion : $\boxed{\text{et pour tout } t \in]0;+\infty[: f'(t) = \ln(t) + 1}$
3. En $+\infty$: $t\ln(t) \to +\infty$
   Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
   Pour le signe de $\ln(t)+1$ on peut résoudre $\ln(t)+1>0$ (« et de même pour <0 et $=0$)ou plus rapidement :

t	0		e^{-1}		$+\infty$
$\ln(t)+1$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	
$f'(t)$	?	$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et $f''(t) = 1/t > 0$
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est convexe sur }]0;+\infty[.}$
5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
   a) On calcule le taux d'accroissement, à droite seulement d'où la « demi »tangente :
   $$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \ln(t) \to -\infty$$
   Donc Γ admet une demi-tangente verticale en O.

b) On a un premier point d'intersection en O
et pour $t \neq 0$: $f(t) = 0 \iff t\ln(t) = 0 \iff \ln(t) = 0 \iff t = 1$
Conclusion : $\boxed{\text{les points d'intersection de } \Gamma \text{ et, de l'axe des abscisses. sont } (0,0) \text{ et } (1,0)}$

c) En $+\infty$: $f(t)/t = \ln(t) \to +\infty$
Il y a donc une branche parabolique verticale

d) Pour tracer l'allure de Γ, il reste à déterminer la pente en (e,e) : $f'(1) = 1$
Il faut donc place $(0,0)$ avec tangente verticale, $(e^{-1}, -e^{-1})$ avec tangente horizontale, $(0,1)$ avec pente de 1 et enfin la branche parabolique.

Partie Il : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, de classe C^2, définie, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

1. F est de classe C^2 comme quotient de fonctions C^2 (contenu du ln strictement positif et dénominateur non nul) sur $]0;+\infty[^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2} \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\ln(x)}{y^2} + \frac{1}{xy}
\end{aligned}$$

2. On ne demande pas tous les points critique (résolution) mais de montrer que (e,e) en est un : vérification.
En (e,e) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(e,e) &= \frac{1}{e^2} - \frac{\ln(e)}{e^2} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y}(e,e) &= -\frac{\ln(e)}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } (e,e) \text{ est un point critique de } F}$

3. On a :

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-1}{x^2 y} + 2\frac{\ln(y)}{x^3} \\
s &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{xy^2} - \frac{1}{yx^2} \\
t &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{\ln(x)}{y^3} - \frac{1}{xy^2}
\end{aligned}$$

et en (e,e) :
$r = 1/e^3$: $s = -2/e^3$ et $t = 1/e^3$
Donc $rt - s^2 = -2/e^6 < 0$
Conclusion : $\boxed{\text{sur l'ouvert }]0;+\infty[^2 \ F \text{ n'a donc pas d'extremum local en } (e,e)}$

EXERCICE 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. L'intégrale d'une fonction continnue (puissance positive) n'est impropre qu'en $+\infty$.
   On compare à une référence : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} 1dx$:
   $\dfrac{x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{1/x^2} = x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + (n-2)\ln(x)\right)$ avec
   $() = -x^2\left(\frac{1}{2a^2} - (n-2)\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) \to -\infty$ car $\ln(x) = o\left(x^2\right)$
   donc $\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + (n-2)\ln(x)\right) \to 0$ et
   Conclusion : $\boxed{x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = o\left(1/x^2\right)}$
   Et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (Rieamnn) alors, par majoration de fonction positive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ également.

2. a) La loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.a pour densité : $\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-(x/a)^2/2}$
   Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-(x/a)^2/2} dx &= 1 \text{ et par parité} \\
\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(x/a)^2/2} dx &= \frac{1}{2} \text{ donc} \\
\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx &= \frac{a\sqrt{2\pi}}{2}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{I_0 = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}$

   b) $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.$\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \frac{-2x}{2a^2} \\
&= -e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \frac{x}{a^2}
\end{aligned}$$

   On a alors, en passant par l'intégrale partielle, quand $M \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\int_0^M x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx &= \left[-a^2\varphi(x)\right]_0^M \\
&= -a^2 e^{-\frac{M^2}{2a^2}} + a^2 \\
&\to a^2
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{I_1 = a^2}$

3. a) Pour tout entier n. tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$ par intégration par aprties avec

$u(x) = x^{n-1} : u'(x) = (n-1)x^{n-2} : v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2a^2}} : v(x) = -a^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ et u et v C^1 sur $[0,t]$ car la puissance est positive !

$$\begin{aligned}\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx &= \left[-a^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}x^{n-1}\right]_0^t - \int_0^t -a^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}(n-1)x^{n-2}dx \\ &= -a^2t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2\int_0^t x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx\end{aligned}$$

b) et quand $t \to +\infty$ on a $t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \to 0$ comme précédemment donc

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ tel que } n \geq 2 : I_n = (n-1)a^2I_{n-2}.}$

c) On a donc $(n = 2 \geq 2)$ donc

$$\begin{aligned}I_2 &= 1a^2I_0 = a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ I_1 &= 2a^2I_1 = 2a^4\end{aligned}$$

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0\end{cases}$$

4. g_a est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et positive.
   $\int_{-\infty}^0 g_a(x)\,dx = 0$ et
   $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = \frac{1}{a^2}I_1 = a^2$$
   donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t)\,dt$ converge et vaut 1
   Conclusion : $\boxed{g_a \text{ est une densité de probabilité}}$

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Soit G la fonction de répartion de X. On a pour tout $t \in \mathbb{R} : G(t) = \int_{-\infty}^t g_a(x)\,dx$
   – si $t \leq 0 : G(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^t 0dx = 0$
   – si $t \geq 0 : G(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^t \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]_0^t = 1 - e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$
6. On a
   $$\int_0^{+\infty} x\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = \frac{1}{a^2}I_2 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
   et comme $\int_{-\infty}^0 xg_a(x)\,dx$ converge et est nulle alors $\int_{-\infty}^{+\infty} xg_a(x)\,dx$ converge et vaut $a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
   Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$
7. On cherche l'espérance de X^2 :
   $$\int_0^{+\infty} x^2\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} x^3e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = \frac{1}{a^2}I_3 = 2a^2$$
   Donc X^2 a iune espérance et $E(X^2) = 2a^2$
   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}X \text{ a une variance et} \\ V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 = \frac{4-\pi}{2}a^2\end{array}}$

8. a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle, $]0;1]$.

Soit f la densité d'une loi $\mathcal{U}_{]0;1]}$: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et F sa fonction de répartition.

Soit enfin H la fonction de répartition de $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H(x) &= \mathrm{P}\left(a\sqrt{-2\ln(U)} \leq x\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\sqrt{-2\ln(U)} \leq \frac{x}{a}\right) \text{ car } a > 0 \\ &= \mathrm{P}\left(-2\ln(U) \leq \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\ln(U) \geq -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \\ &= \mathrm{P}\left(U \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right) \\ &= 1 - F\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

Comme U est à densité, F est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

Donc H est cntinue sur $\mathbb{R}$ et C^1 là où $\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \neq 0$ et $\neq 1$ i.e. en $x \neq 0$

Donc Z est à densité et une densité de Z est :

$$h(x) = -F'\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\frac{-x}{a^2}$$

et comme $\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \in]0;1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors

$$h(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\frac{x}{a^2} = g_a(x)$$

Conclusion : $\boxed{Z = a\sqrt{-2\ln(U)} \text{ suit la même loi que la variable aléatoire } X}$

b) La loi uniforme $\mathcal{U}_{]0;1]}$ est simulée par `U :=random ;` et `Z :=a*sqrt(-2*ln(U))` simulera donc la loi de X

```
program simula ;
var a,U,Z :real ;
begin
    writeln('a,') ;readln(a) ;randomize ;
    U :=random ;
    Z :=a*sqrt(-2*ln(U) ;
    writeln(Z) ;
end.
```

Soit un entier n tel que $n \geq 2$.

On dit. que les. variables aléatoires à densité X_1, $X_2 \cdots, X_n$ sont indépendantes si, pour tout, n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de réels, les événements $(X_1 \leq x_1)$, $(X_2 \leq x_2)$, $\cdots (X_n \leq x_n)$ sont mutuellement indépendants.

On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, $X_2 \cdots, X_n$admettent une espérance, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance qui est égale à la somme des espérances.

On admet que si n variables aléatoires à densité $X_1,\ X_2\cdots,X_n$sont indépendantes et admettent variance alors la variable aléatoire $X_1+\cdots+X_n$ admet une variance qui est égale à la. somme des variances.
On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1,\ X_2\cdots,X_n$ suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X.

9. On considère la variable aléatoire $A_n=\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)$.

   a) On a $A_n=\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}X_k$ donc A a une espérance et

$$\begin{aligned}E\left(A_n\right) &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}E\left(X_k\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{n}1\\ &= a\end{aligned}$$

   Donc le biais de A_n comme estimateur de a est : $a-a=0$
   Conclusion : $\boxed{A_n\text{, est un estimateur sans biais de } a.}$

   b) Comme les (X_k) sont indépendantes alors

$$\begin{aligned}V\left(A_n\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}V\left(X_k\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{4-\pi}{2}a^2\\ &= \frac{2}{n^2\pi}\frac{4-\pi}{2}a^2\sum_{k=1}^{n}1\\ &= \frac{4-\pi}{n\pi}a^2\end{aligned}$$

   Donc le risque quadratique est $r=V\left(A_n\right)+biais^2$
   Conclusion : $\boxed{\text{le risque quadratique de l'estimateur } A_n \text{ est } \dfrac{4-\pi}{n\pi}a^2}$

On définit la variable aléatoire $M_n=\min\left(X_1,X_2\cdots,X_n\right)$.
Ainsi : $\forall t\in\mathbb{R},\ (M_n>t)=(X_1>t)\cap(X_2>t)\cap\cdots\cap(X_n>t)\,.$

10. a) pour tout $t\,[0,+\infty[$ par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(M_n>t\right) &= \mathrm{P}\left(X_1>t\right)\mathrm{P}\left(X_2>t\right)\cdots\mathrm{P}\left(X_n>t\right)\\ &= \left(1-G\left(t\right)\right)^n\\ &= \left(e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)^n\\ &= e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}\end{aligned}$$

b) On a donc, pour tout $t \geq 0$:

$$\mathrm{P}(M_n \leq t) = 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$$

et comme $\mathrm{P}(M_n \leq 0) = 0$ et que la fonciton de répartition est croissante sur $\mathbb{R}$ alors

Conclusion : $\boxed{\text{sa fonction de répartition est : } \mathrm{P}(M_n \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}}$

c) La fonction de répartiton est croissante sur $[0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$

En 0^- : $\mathrm{P}(M_n \leq t) = 0 \to 0 = \mathrm{P}(M_n \leq 0)$ donc sa fonciton de répartiton est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Donc M_n est à densité et une densité de M_n est (dérivée de la précédente) : $\begin{cases} \frac{nt}{a^2} e^{-\frac{nt^2}{2a^2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sion} \end{cases} = g_b$ avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

d) On a vu que, pour tout réel $a > 0$, X de densité g_a a pour espérance $a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Donc M_n a une espérance et espérance

$$\begin{aligned} E(M_n) &= b\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \\ V(M_n) &= \frac{4-\pi}{2} b^2 = \frac{a^2}{n}\frac{4-\pi}{2} \end{aligned}$$

11. a) Donc avec $B_n = M_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$ on a $E(B_n) = E(M_n)\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} = a$

Conclusion : $\boxed{B_n = M_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \text{ est un estimateur sans biais de } a}$

b) On a

$$\begin{aligned} V(B_n) &= \sqrt{\frac{2n}{\pi}}^2 V(M_n) \\ &= \frac{2n}{\pi}\frac{a^2}{n}\frac{4-\pi}{2} \\ &= a^2\frac{4-\pi}{\pi} \end{aligned}$$

Donc le risque quadratique de B_n comme estimateur de a est : $a^2\dfrac{4-\pi}{\pi}$

risque quadratique qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$: A_n est grandement préférable !