# Lyon 2013 voie E

# EXERCICE 1

## Partie I- Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

1. $\forall t \in ]0;1]$, $g(t) = t\ln t$ donc $g$ est continue sur $]0;1]$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0;1]$.
   Continuité en 0 : $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$ donc $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0 = g(0)$ donc $g$ est continue en 0.
   Conclusion : Ainsi, $g$ est continue sur $[0;1]$.
2. Soit $x \in ]0;1]$. Posons :
   $\begin{array}{ll} u(t) = -\ln t & u'(t) = -\dfrac{1}{t} \\ v(t) = \dfrac{t^2}{2} & v'(t) = t \end{array}$. $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[x;1]$ donc à l'aide d'une intégration par parties :
   $\displaystyle\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2}{2}\ln t\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln x + \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^1 = \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}$
3. Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{1}{4}$ donc $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}}$.

## Partie II- Exemple de densité

1. - $f$ est continue sur $]1;+\infty[$ en tant que fontion nulle.
   - $f$ est continue sur $]-\infty;0[$ en tant que fonction nulle et sur $]0;1[$ en tant que somme de fonctions continues.
     En 0 : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} -t\ln t + t^{1/3} = 0 = \lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$. Ainsi $f$ est continue en 0.
     $f$ est donc continue sur $]-\infty;1[$.
   - Continuité en 1 : $\lim\limits_{t\to 1^-} -t\ln t + t^{1/3} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 0$ donc $f$ n'est pas continue en 1.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{1/3}\mathrm{d}t$ (d'après Chasles car les deux intégrales en présence sont convergentes).
   Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \left[\frac{3}{4}t^{4/3}\right]_0^1 = 1.$
3. - $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.
   - $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geqslant 0$.
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$

   **Conclusion :** $f$ est une densité de probabilité.
4. (a) $f$ est de classe $C^2$ sur $]0;1[$ en tant que somme de fonctions de classe $C^2$ sur $]0;1[$. Et $\forall t \in ]0;1[$,
   $$f'(t) = -\ln t - 1 + \frac{1}{3}t^{-2/3} \text{ et } f''(t) = -\frac{1}{t} - \frac{2}{9}t^{-5/3}$$
   (b) $\forall t \in ]0;1[$, $f''(t) < 0$ donc $f'$ est strictement décroissante sur $]0;1[$. $f'$ est donc continue et strictement décroissante sur $]0;1[$ donc elle réalise une bijection de $]0;1[$ sur $f'(]0;1[) = ]-\dfrac{2}{3};+\infty[$. Or, $0 \in ]-\dfrac{2}{3};+\infty[$ donc l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur ]0 ;1[.
   D'autre part, $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\ln\dfrac{1}{e} - 1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{-2/3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{-2/3} > 0 = f'(\alpha)$.

Ainsi, $\dfrac{1}{e} < \alpha$ car $f'$ est strictement décroissante.

On a donc : $\boxed{\dfrac{1}{e} < \alpha < 1}$

(c)
```
program EML2013;
var a,b,c:real;
function f (x:real):real;
  begin
  f:= -x * ln(x) +exp(ln(x)/3);
  end;
BEGIN
  a:=exp(-1);
  b:=1;
  repeat
    begin
    c:=(a+b)/2;
    if f(c) < 0 then b:=c else a:=c;
  until (b-a) < exp(-3*ln(10));
  write ((a+b)/2);
END;
```

**Partie III- Calcul d'une fonction de répartition**

1. Soit $x \in ]0;1[$,

$$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_x^1 g(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 t^{1/3}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4} + \left[\frac{3}{4}t^{4/3}\right]_x^1 = \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^{4/3}$$

donc $\boxed{\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x^{4/3}}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
   - Premier cas : si $x < 0$
     alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.$
   - Deuxième cas : si $x \in ]0;1[$
     $$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_x^1 f(t)dt \\ &= 1 - \textstyle\int_x^1 f(t)dt = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{4}x^{4/3} \end{aligned}$$
   - Troisième cas : si $x > 1$
     $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = 1$

   **<u>Conclusion :</u>** $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{4}x^{4/3} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

3. Graphique :

**Partie III- Etude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles**

1. On trace les droites d'équation $y = 1 - x$ et $x = \dfrac{1}{2}$ et l'ensemble $D$ est l'ensemble ouvert de couleur :

Soit $(x, y) \in D$,on a lors, $x + y \in ]0; 1[$ et $2x \in ]0; 1[$ donc $\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, y) = f'(x + y) - f'(2x) \\ \dfrac{\partial G}{\partial y}(x, y) = f'(x + y) \end{cases}$

Soit $(x, y) \in D$. $(x, y)$ est un point critique de $G$ si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x + y) - f'(2x) = 0 \\ f'(x + y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(2x) = 0 \\ f'(x + y) = 0 \end{cases}$$

Or d'après la question II.4.b., $f'$ s'annule en un seul point $\alpha$ donc $(x, y)$ est un point critique de $G$ si et seulement si $\begin{cases} 2x = \alpha \\ x + y = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} \\ y = \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$

Conclusion : $G$ admet $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ pour unique point critique.

$G$ est de classe $C^2$ sur $D$ qui est un ouvert ; calculons les dérivées partielles secondes de $G$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{(\partial x)^2}(x, y) = f''(x + y) - 2f''(2x) \\ \dfrac{\partial^2 G}{(\partial y)^2}(x, y) = f''(x + y) \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x, y) = f''(x + y) \text{d'après Schwarz car } f \text{ est de classe} C^2 \end{cases}$$

Ainsi, d'après les notations de Monge au point $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ :

$$\begin{cases} t_0 = \dfrac{\partial^2 G}{(\partial x)^2}\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right) = f''(\alpha) - 2f''(\alpha) = -f''(\alpha) \\ \dfrac{\partial^2 G}{(\partial y)^2}\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right) = f''(\alpha) \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = f''(\alpha) \end{cases}$$

Ainsi, $r_0 t_0 - s_0^2 = -f''(\alpha)^2 - f''(\alpha)^2 = -2f''(\alpha)^2 < 0$.
Ainsi, $G$ n'admet pas d'extremum local en $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

# EXERCICE 2

1. $A$ est une matrice symétrique donc elle est diagonalisable.
2. $\lambda$ est valeur propre de $A$ ssi $A-\lambda I$ est non inversible. Or
$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 0 & 2\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda & 0\\ 2 & 0 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & -\lambda & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ -\lambda & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2\end{pmatrix}.$$
Ainsi, $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $1-\lambda^2=0$ ou $4-\lambda^2=0$.
Ainsi, $\boxed{\text{Sp}(A)=\{1,-1,2,-2\}}$.

   ◦ Si $\lambda=1$
$$AX=X\iff\begin{cases}-a+2d=0=0\\ -b+c=0\\ 3d=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=0\\ d=0\\ b=c\end{cases}\text{ donc } E_1=\text{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$
   ◦ Si $\lambda=-1$
$$AX=-X\iff\begin{cases}a+2d=0\\ b+c=0\\ 3d=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=0\\ d=0\\ b=-c\end{cases}\text{ donc } E_{-1}=\text{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$
   ◦ Si $\lambda=2$
$$AX=2X\iff\begin{cases}-2a+2d=0\\ -2b+c=0\\ -3b=0\end{cases}\iff\begin{cases}b=0\\ c=0\\ a=d\end{cases}\text{ donc } E_2=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$
   ◦ Si $\lambda=-2$
$$AX=-2X\iff\begin{cases}2a+2d=0\\ 2b+c=0\\ 3b=0\end{cases}\iff\begin{cases}b=0\\ c=0\\ a=-d\end{cases}\text{ donc } E_{-2}=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$
3. D'après les résultats précédents, si $D=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ alors $A=PDP^{-1}$.

   Après calculs, $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. • $C_A\subset\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   • $C_A\neq\emptyset$ (la matrice nulle appartient à $C_A$).
   • Soient $M$ et $N$ deux éléments de $C_A$.
   $A(M+N)=AM+AN=MA+NA=(M+N)A$ donc $M+N\in C_A$.
   • Soit $M\in C_A$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,
   $A(\lambda M)=\lambda(AM)=\lambda(MA)=(\lambda M)A$ donc $\lambda M\in C_A$.

   **Conclusion :** $C_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
5. Soit $M\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $N=P^{-1}MP$.
   $M\in C_A\iff AM=MA\iff(PDP^{-1})(PNP^{-1})=(PNP^{-1})(PDP^{-1})\iff PDNP^{-1}=PNDP^{-1}$ et en multipliant à gauche par $P^{-1}$ et à droite par $P$ on obtient :
   $M\in C_A\iff DN=ND\iff N\in C_D$.
6. Soit $N=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & o & p\end{pmatrix}$.

$$N \in C_D \iff ND = DN \iff \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c & -2d \\ -e & -f & -g & -h \\ i & j & k & l \\ 2m & 2n & 2o & 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -b & c & 2d \\ -2e & -f & g & 2h \\ -2i & -j & k & 2l \\ -2m & -n & o & 2p \end{pmatrix}.$$
$$\iff b = c = d = e = g = h = i = j = l = m = n = o = 0$$

Ainsi, $N \in C_D \iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{C_D = \left\{ N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, a, f, k, p, \text{réels} \right\}}$.

7. D'après la question 5, $M \in C_A \iff P^{-1}MP \in C_N \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ où $a, f, k, p$ sont des réels.

   Ainsi, $M \in C_A \iff M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} P^{-1} \iff M = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} a+p & 0 & 0 & -a+p \\ 0 & f+k & -f+k & 0 \\ 0 & -f+k & f+k & 0 \\ -a+p & 0 & 0 & a+p \end{pmatrix}$.

   <u>**Conclusion :**</u> $\boxed{C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}}$

8. Ainsi, $C_A = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de $C_A$ et elle est clairement libre donc c'est une base de $C_A$ et $\boxed{\dim(C_A)=4}$.

# EXERCICE 3

**Partie I**

1. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. $X_i$ compte le nombre de succès lors de la répétition de $k$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès $\frac{1}{n}$. Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right)$.
   $X_i(\Omega) = [\![1,k]\!]$ et $\forall j \in [\![1,k]\!], P(X_i = j) = \binom{k}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-j}$.
   $\mathrm{E}(X_i) = \frac{k}{n}$ et $\mathrm{V}(X_i) = \frac{k}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.
2. Considérons $X_i$ et $X_j$ avec $i \neq j$ .
   $\mathrm{P}(X_i = k \cap X_j = k) = 0$ car on ne peut pas tirer $k$ fois la boule $i$ et $k$ fois la boule $j$ au cours de $k$ tirages.
   Or , $\mathrm{P}(X_i = k) \neq 0$ et $\mathrm{P}(X_j = k) \neq 0$ donc $\mathrm{P}(X_i = k \cap X_j = k) \neq \mathrm{P}(X_i = k)\mathrm{P}(X_j = k)$.
   Ainsi, $X_i$ et $X_j$ ne sont pas indépendantes.
   <u>Conclusion :</u> Les variables $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas indépendantes.
3. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) $X_i + X_j$ compte le nombre de succès (apparition de la boule $i$ ou de la boule $j$) lors de la répétition de $k$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès $\frac{2}{n}$.
   Ainsi, $X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)$.
   Donc, $\mathrm{V}(X_i + X_j) = \frac{2k}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)$.
   (b) On a : $\mathrm{V}(X_i + X_j) = \mathrm{V}(X_i) + \mathrm{V}(X_j) + 2\mathrm{cov}(X_i, X_j)$.
   Ainsi, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{V}(X_i + X_j) - \mathrm{V}(X_i) - \mathrm{V}(X_j)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2k}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right) - \frac{2k}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{-k}{n^2}$.
   <u>**Conclusion :**</u> $\boxed{\mathrm{cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}}$.

**Partie II**

1. • $Z_1(\Omega) = \{1\}$ donc $Z_1$ est la variable aléatoire certaine égale à 1. (on ne peut obtenir qu'une couleur en 1 tirage ! !). Donc $\mathrm{E}(Z_1) = 1$.
   • $Z_2(\Omega) = \{1; 2\}$. Notons $B_{i,j}$ l'événement "la boule $i$ est tirée au tirage $j$".
   $(Z_2 = 1)$ signifie qu'on a tiré le même numéro lors des deux tirages ;
   $\mathrm{P}(Z_2 = 1) = \mathrm{P}(B_{1,1} \cap B_{1,2}) + \mathrm{P}(B_{2,1} \cap B_{2,2}) + \ldots + \mathrm{P}(B_{n,1} \cap B_{n,2}) = n\frac{1}{n^2}$ car les tirages sont indépendants.
   Ainsi, $\mathrm{P}(Z_2 = 1) = \frac{1}{n}$.
   Puis, $\mathrm{P}(Z_2 = 2) = 1 - \mathrm{P}(Z_2 = 1) = 1 - \frac{1}{n}$.
   Ainsin $\mathrm{E}(Z_2) = 1.\mathrm{P}(Z_2 = 1) + 2.\mathrm{P}(Z_2 = 2) = \frac{1}{n} + 2\left(1-\frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$.
2. Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) • $(Z_k = 1)$ signifie qu'on a tiré le même numéro lors des $k$ tirages ; en reprenant les notations précédentes :
   $\mathrm{P}(Z_k = 1) = \mathrm{P}(B_{1,1} \cap \ldots \cap B_{1,k}) + \ldots + \mathrm{P}(B_{n,1} \cap \ldots \cap B_{n,k}) = n.\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$.
   • $(Z_k) = k$ signifie qu'un numéro différent a été tiré à chaque tirage.
   Il y a $n(n-1)(n-2)....(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ événements qui correspondent à une telle série de tirage. Et chacun de ces évenements a une probabilité $\frac{1}{n^k}$ de se produire.
   Ainsi, $\mathrm{P}(Z_k = k) = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}$.

(b) ∘ Soit $\ell \in [\![2, n]\!]$. $(Z_k = i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = \ell)\mathrm{P}(Z_k = i).$$

Or, $\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = \ell) = 0$ si $i \neq \ell$ ou $i \neq \ell - 1$ pour qu'il y ait $\ell$ numéros distincts au $k+1$-eme tirage il faut qu'il y en ait $\ell$ ou $\ell - 1$ disctincts au $k$-eme tirage :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) &= \mathrm{P}_{(Z_k=\ell)}(Z_{k+1} = \ell)\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \mathrm{P}_{(Z_k=\ell-1)}(Z_{k+1} = \ell)\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1) \\ &= \frac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1) \end{aligned}$$

car

- Si $Z_k = \ell$ est réalisé, pour que $Z_{k+1} = \ell$ soit réalisé, il faut tirer au $k+1$-eme tirage un des $\ell$ numéros déjà tirés : ainsi, $\mathrm{P}_{(Z_k=\ell)}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{n}$.
- Si $Z_k = \ell - 1$ est réalisé, pour que $Z_{k+1} = \ell$ soit réalisé, il faut tirer au $k+1$-eme tirage un des $n - (\ell - 1)$ numéros non tirés : ainsi, $\mathrm{P}_{(Z_k=\ell)}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{n - \ell + 1}{n}$.

∘ Si $\ell = 1$, la formule donne, $\mathrm{P}(Z_{k+1} = 1) = \dfrac{1}{n}\mathrm{P}(Z_k = 1)$ ce qui correspond bien au résultat du a).

(c) On a $Z_k(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$ et $Z_{k+1}(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$ donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z_{k+1}) &= \sum_{\ell=0}^{n} \ell\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \ell\left(\frac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1)\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\ell^2}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell)\right) + \sum_{\ell=2}^{n} \ell\frac{n - \ell + 1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1) \text{ car } \mathrm{P}(Z_k = 0) = 0 \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\ell^2}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell)\right) + \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)\frac{n-j}{n}\mathrm{P}(Z_k = j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j^2}{n}\mathrm{P}(Z_k = j)\right) + \sum_{j=1}^{n} j\frac{n-j}{n}\mathrm{P}(Z_k = j) + \sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{n}\mathrm{P}(Z_k = j) \\ &\quad \text{le terme en } j = n \text{ des deux sommes est nul} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j^2}{n}\mathrm{P}(Z_k = j)\right) + \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Z_k = j) - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j^2}{n}\mathrm{P}(Z_k = j)\right) + \sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{n}\mathrm{P}(Z_k = j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Z_k = j) + \sum_{j=1}^{n}\mathrm{P}(Z_k = j)) - \sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}\mathrm{P}(Z_k = j) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{E}(Z_k) + 1 \end{aligned}$$

**Conclusion :** $\boxed{\mathrm{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{E}(Z_k) + 1}$.

3. (a) Soit $k \geqslant 1$ ;

$$v_{k+1} = \mathrm{E}(Z_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n}\mathrm{E}(Z_k) + 1 - n = \frac{n-1}{n}\left(\mathrm{E}(Z_k) + (1-n)\frac{n}{n-1}\right) = \frac{n-1}{n}(\mathrm{E}(Z_k) - n)$$

donc $v_{k+1} = \dfrac{n-1}{n}v_k$ Ainsi, la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$.

(b) Donc, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 1 : $v_k = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$ et $v_1 = E(Z_1) - n = 1 - n$.

Donc, $v_k = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}(1-n) = -n\left(\dfrac{1-n}{n}\right)^k$.

Ainsi, $\boxed{\mathrm{E}(Z_k) = v_k + n = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)}$.

**Partie III**

1. D'après la question II. 2. a., $\mathrm{P}(Z_k = 1) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$.

   $\mathrm{P}(Z_k \geqslant 5) = 0$ puisqu'il n'y a ici que 4 boules, donc pas plus de 4 numéros distincts...

2. On raisonne par récurrence en utilisant la partie II question 2.b.

   – Initialisation : $k = 1$, $P(Z_1 = 2) = 0$ d'après II.1. et $6\dfrac{2^1 - 2}{4^1} = 0$. $\mathrm{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$. Ainsi, la relation est vérifiée pour $k = 1$.

   – Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in [\![1, 4]\!]$ tel que $P(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.
   D'après la question, II. 2.b.,

   $$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_{k+1} = 2) &= \frac{2}{4}\mathrm{P}(Z_k = 2) + \frac{3}{4}\mathrm{P}(Z_k = 1) \\ &= 12\frac{2^k - 2}{4^{k+1}} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence et la question 1.} \\ &= 6\frac{2^{k+1} - 4}{4^{k+1}} + \frac{12}{4^{k+1}} \\ &= 6\frac{2^{k+1} - 2}{4^{k+1}} \end{aligned}$$

   **<u>Conclusion :</u>** $\boxed{P(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}}$.

3. (a) $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. Les événements $A_i$ ne sont pas disjoints donc on utilise la formule du crible :
   $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_4)$
   $-\mathrm{P}(A_2 \cap A_3) - \mathrm{P}(A_2 \cap A_4) - \mathrm{P}(A_3 \cap A_4) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_3)$
   $+\mathrm{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ Or,

   - $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_3) = \mathrm{P}(A_4)$
   - $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_4) = \mathrm{P}(A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_2 \cap A_4) = \mathrm{P}(A_3 \cap A_4)$
   - $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$
   - $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$ (il faut bien tirer un numéro ! !)

   Donc, $\boxed{\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\mathrm{P}(A_1) - 6\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + 4\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$.

   (b)
   - $\mathrm{P}(A_1) = P(X_1 = 0) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^k$
   - $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = P(X_1 + X_2 = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$
   - $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(B_{4,1} \cap B_{4,2} \cap \ldots \cap B_{4,k}) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^k$ ( on n'a obtenu que la boule 4).

   (c) Ainsi,
   - $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^k - 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$
   - Puis :
   $$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_k = 3) &= \mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) - \mathrm{P}(Z_k = 1) - \mathrm{P}(Z_k = 2) \\ &= 4\left(\frac{3}{4}\right)^k - 6\left(\frac{1}{2}\right)^k + 4\left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} - 6\frac{2^k - 2}{4^k} \\ &= 4\left(\frac{3}{4}\right)^k - 12\left(\frac{1}{2}\right)^k + 12\left(\frac{1}{4}\right)^k \end{aligned}$$
   - $\mathrm{P}(Z_k = 4) = 1 - P(Z_k \leqslant 3) = 1 - 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^k + 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^k - 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$