Corrigé EMLyon 2015 eco (par laurent Foubert)

EXERCICE 1:

P artie I. Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, qu'on notera $\mathcal{E}(\lambda)$:

1. Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$,une densité de X est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = 0 & si\ x < 0 \end{cases}$.

   La fonction de répartition de X est alors définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} F(x) = 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ F(x) = 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$.

   X admet alors pour espérance $\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$ et pour variance $\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$.

2. L'intégrale d'une densité de X étant égale à 1 ,on a :
   $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\lambda}.1 = \frac{1}{\lambda}$ soit $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}}$

   et $\int_0^{+\infty} x.e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x.\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x.f(x)dx = \frac{1}{\lambda}E(X) = \frac{1}{\lambda}.\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$ soit $\boxed{\int_0^{+\infty} x.e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}}$

3. Notons F_V et F_U les fonctions de répartitions respectives de V et U.

   (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = P(V \leqslant x) = P(-\frac{1}{\lambda}ln(1-U) \leqslant x) = P(ln(1-U) \geq -\lambda.x) = P((1-U) \geq e^{-\lambda.x}) = P((1-e^{-\lambda x}) \geq U) = F_U(1-e^{-\lambda x})$
   Or si $x \leq 0$, on a $1 - e^{-\lambda x} \leq 0$ donc $F_V(x) = F_U(1-e^{-\lambda x}) = 0 = F_X(x)$
   et si $x \geq 0$, on a $1 - e^{-\lambda x} \in [0;1]$ donc $F_V(x) = F_U(1-e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} = F_X(x)$.

   Par conséquent ,<u>la fonctionde répartition de V est celle d'une loi exponentielle de paramètre λ</u>

   (b) function V=expo(lambda)
   V=-(1/lambda)*log(1-rand()),// c'est la simulation par inversion de la fonction de répartition.
   endfunction

4. **<u>Partie II. Loi de la v.a.r. $T_n = max(X_1, ..., X_n)$.</u>**

   (a) Comme les v.a.r .<u>$X_1, ..., X_n$</u> sont indépendantes et que
   <u>$max(X_1, ..., X_n) \leq x$</u> équivaut à $(X_1 \leqslant x)$ et $(X_2 \leqslant x)$ et ..... $(X_n \leqslant x)$.
   on a pour tout $x > 0$:
   $P(T_n \leqslant x) = P(max(X_1, ..., X_n) \leqslant x) = P((X_1 \leqslant x) \cap ..... \cap (X_n \leqslant x)) = P(X_1 \leqslant x).....P(X_n \leqslant x))) = (1-e^{-x})....(1-e^{-x}) = (1-e^{-x})^n = F_{T_n}(x)$.

   (b) La fonction de répartition de T_n est alors définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} F_{T_n}(x) = (1-e^{-x})^n & si\ x \geq 0 \\ F_{T_n}(x) = 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$.

   T_n ayant une fonction de répartition qui est (évidemment ?) de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$et aussi continue en 0 (car$\underset{0+}{Lim}(1-e^{-x})^n = \underset{0-}{Lim}0 = 0$) ,c'est une variable continue dont une densité $f_n$est la dérivée de F_{T_n} sur $\mathbb{R}^*$.

   On a donc pour densité de T_n : $\begin{cases} f_n(x) = F'_{T_n}(x) = ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & si\ x > 0 \\ f_n(x) = F'_{T_n}(x) = 0 & si\ x < 0 \end{cases}$.

5. <u>.</u>

   (a) Comme f_n est nulle sur $\mathbb{R}^-$et continue sur $[0, +\infty[$, il s'agit ici de montrer la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} x.f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} x.ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}dx$.
   Par équivalence de 2 fonctions positives en $+\infty$:
   pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\underset{+\infty}{Lim}(1-e^{-x})^{n-1} = 1$ donc $x.ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} \sim x.ne^{-x}$.
   Par conséquent $\int_0^{+\infty} x.f_n(x)dx$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x.e^{-x}dx$,donc <u>convergente</u> d'après la 1ère partie.
   T_n admet donc une epérance $\boxed{E(T_n) = \int_0^{+\infty} x.f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} x.ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}dx.}$

   (b) Pour n=1 : $E(T_1) = \int_0^{+\infty} x.f_1(x)dx = \int_0^{+\infty} x.e^{-x}dx = 1$. (d'après la partie I).
   Et pour n=2 : $E(T_2) = \int_0^{+\infty} x.f_2(x)dx = \int_0^{+\infty} 2x.e^{-x}(1-e^{-x})dx = \int_0^{+\infty} 2x.e^{-x}dx - \int_0^{+\infty} 2x.e^{-2x}dx$.
   Donc toujours selon la 1ère partie $E(T_2) = 2.1 - 2.\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.

6. .

(a) Pour $x > 0$,on a d'une part :

$$f_{n+1}(x)-f_n(x) = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n-ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} = e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[(n+1)(1-e^{-x})-n] = e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[1-($$

et d'autre part :

$$f'_{n+1}(x) = [(n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n]' = (n+1)[-e^{-x}(1-e^{-x})^n+e^{-x}ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}] = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[-(1-e^{-x})+$$

On en conclut $\boxed{-\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x) = e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[1-(n+1)e^{-x}] = f_{n+1}(x)-f_n(x)}$

(b) Les fonctions définies par $u(x) = x$ et $v(x) = -\frac{1}{n+1}f_{n+1}(x)$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$,l'intégration par parties sur $[0, A]$ fournit:

$$\int_0^A x(f_{n+1}(x)-f_n(x))dx = \int_0^A u(x).v'(x)dx = [x(-\frac{1}{n+1}f_{n+1}(x))]_0^A - \int_0^A 1.(-\frac{1}{n+1}f_{n+1}(x))dx = A(-\frac{1}{n+1}f_{n+1}(A))+$$

Comme les intégrales en question sont convergentes et que $\underset{+\infty}{Lim} A(-\frac{1}{n+1}f_{n+1}(A)) = 0$ (théorème des croissances comparées) ,on obtient

$$\int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x)-f_n(x))dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A x(f_{n+1}(x)-f_n(x))dx = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{n+1}\int_0^A f_{n+1}(x)dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx$$

(c) On en déduit $\boxed{E(T_{n+1})-E(T_n) = \int_0^{+\infty} x.f_{n+1}(x)dx - \int_0^{+\infty} x.f_n(x)dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx = \frac{1}{n+1}}$ (f_{n+1}est une densité).

Donc $E(T_{n+1}) = E(T_n) + \frac{1}{n+1}$ et comme $E(T_1) = 1$,on obtient par récurrence $\boxed{E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$.

P artie III : Loi du premier dépassement

7. On a $N = 0$ lorsque pour tout $n \in\mathbb{N}^*$, $X_{.n} \leq a$.
Donc $N = 0$ équivaut à $X_{.1} \leq a$ et $X_{.2} \leq a$ et ...$X_{.n} \leq a$ et ..... .
Par suite : $\boxed{(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_{.k} \leq a)}$ et les événements $(X_{.k} \leq a)$ sont indépendants .
On a donc $P(N = 0) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=1}^n(X_{.k} \leq a) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n P(X_{.k} \leq a) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n(1-e^{-a}) = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-a})^n = 0$
et donc $\boxed{P(N = 0) = 0}$ car $(1-e^{-a}) \in [0, 1[$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ On a $(N = n) = (X_1 \leq a) \cap ... \cap (X_{n-1} \leq a) \cap (X_n > a)$
donc $\boxed{p(N = n) = P(X_1 \leq a).....P(X_{n-1} \leq a).P(X_n > a) = (1-e^{-a})^{n-1}(e^{-a})}$.

9. On remarque que la v.a.r. N suit une loi géométrique de paramètre $p = e^{-a}$,
donc $\boxed{E(N) = \frac{1}{e^{-a}} = e^a}$ et $\boxed{V(N) = \frac{1-e^{-a}}{(e^{-a})^2} = e^{2a}(1-e^{-a}) = e^{2a}-e^a}$

10. Pour tout $\omega \in \Omega$,on a 2 possibilités :Soit $N(\omega) = n \in \mathbb{N}^*$ et alors $Z(\omega) = X_n(\omega) > a$, soit $N(\omega) = 0$ et alors $Z(\omega) = 0 < a$.
Par conséquent $\boxed{P(Z \leq a) = P(Z = 0) = P(N = 0) = 0}$.

11. Pour x>a :

(a) $(N = n) \cap (Z \leq x) = (N = n) \cap (X_n \leq x)$ donc :

$$Si\, n = 1 :\ (N = 1) \cap (Z \leq x) = (X_1 > a) \cap (X_1 \leq x) = \underline{(a < X_1 \leq x)}$$

et si $n \geq 2$:

$$(N = n) \cap (Z \leq x) = (X_1 \leq a) \cap ... \cap (X_{n-1} \leq a) \cap (X_n > a) \cap (X_n \leq x) = (\underline{T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x)}$$

On en déduit :

$$Si\, n = 1 : \; P((N = 1) \cap (Z \leq x)) = P(a < X_1 \leq x) = F_X(x) - F_X(a) = \underline{e^{-a} - e^{-x}}$$

et si $n \geq 2$:

$$P((N = n) \cap (Z \leq x)) = P(T_{n-1} \leq a).P(a < X_n \leq x) = \underline{(1 - e^{-a})^{n-1}.(e^{-a} - e^{-x})}$$

(en utilisant l'indépendance de T_{n-1} avec X_n et leur fontion de répartition).

(b) La formule des probabilités totales donne :

$$P(Z \leq x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((Z \leq x) \cap (N = n)) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n-1}.(e^{-a} - e^{-x})$$

donc

$$P(Z \leq x) = (e^{-a} - e^{-x}).\frac{1}{1 - (1 - e^{-a})} = (e^{-a} - e^{-x}).e^{a} = 1 - e^{a-x}.$$

12. .

(a) En posant $Z' = Z - a$, on a :
pour tout $t < 0$: $P(Z' \leq t) = P(Z - a \leq t) = P(Z \leq a + t < a) = P(Z \leq a) = 0.$
et pour $t \geq 0$: $P(Z' \leq t) = P(Z - a \leq t) = P(Z \leq a + t) = 1 - e^{a-(a+t)} = 1 - e^{-t}.$
Par conséquent , la variable aléatoire Z' suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

(b) D'après les propriétés de l'esperance et de la variance d'une somme :

$$E(Z) = E(Z' + a) = E(Z') + a = 1 + a \; et \; V(Z) = V(Z' + a) = V(Z') = 1.$$

Exercice 2

Partie I : étude d'une fonction $\varphi(x) = x^2 e^x - 1$:

1. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et* $\varphi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x)$:

D'où :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\underline{\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1}$, car $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$ d'après le théorème des croissances comparées.

2. Sur $]0, +\infty[$,$e^x = \frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow x^2.e^x = 1 \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$.
Or sur $]0, +\infty[$, la continuité et la croissance stricte φ montrent que $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution que l'énoncé note α.
De plus $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.e^{0.5} - 1 = \frac{\sqrt{e}}{4} - 1 < 0$ (car $\sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$) et $\varphi(1) = e^1 - 1 > 0$,donc $\boxed{\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[.}$

Partie II : étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^3 e^x$ et $u_0 = 1$:

3. Par une récurrence immédiate : $\underline{u_0 = 1 \geq 1}$ et si $u_n \geq 1$ alors $u_{n+1} = u_n^3 e^{u_n} \geq 1.e^1 \geq 1$.

4. Pour $n \epsilon \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^3 e^{u_n} - u_n = u_n(u_n^2 e^{u_n} - 1) = u_n.\varphi(u_n) > 0$ car $\varphi > 0$ sur $]1, +\infty[$.
$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est donc croissante}}$.

5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante est supérieure à 1 donc soit elle est convergente vers une limite $l \geq 1$, soit elle tend vers $+\infty$.
Si elle convergeait vers une limite $\ell \geq 1$, comme $\underline{u_{n+1} = f(u_n)}$ et que f est continue sur $]1, +\infty[$,on aurait $l = f(l)$.
Mais $\ell \geq 1$ donc $l = f(l) \Longleftrightarrow l = l^3 e^l \Longleftrightarrow 1 = l^2 e^l \Longleftrightarrow \varphi(l) = 0$, qui n'a pas de solution dans $]1, +\infty[$.
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est donc pas convergente et on a $\underline{\lim_{+\infty} u_n = +\infty}$.

Partie III : étude d'une série

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \frac{1}{n^3 e^n} < \frac{1}{n^3}$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est convergente ,donc par le théorème de majoration des séries à termes positifs ,la série $\sum \dfrac{1}{n^3 e^n}$ est elle aussi convergente .

7. On a
$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)}$$
(c'est le reste à l'ordre n d'une série convergente).
Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n^3 e^n} < \frac{1}{e^n}$, et puisqu'on a ici des séries convergentes:
$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 e^n} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^{n+1}} . \frac{1}{1 - 1/e} = \frac{1}{e^n} . \frac{1}{e-1}$$

8. S=0,n=1,
while (1/((%e-1)*exp(n))) >0.0001,
S=S+1/(n^3*exp(n)), n=n+1, //en sortie du while, S contient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$ et n contient n+1
end
S=S+1/(n^3*exp(n)), //Comme , on n'est pas rentré dans le while pour la 1ère valeur de $n_0$qui vérifie (1/(((il faut donc calculer ici $S_{n_0} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{f(k)}$.

Partie IV : étude d'une fonction de deux variables : $g(x,y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$ *pour* $x > 0$.

9. U est le demi plan (ouvert) des point (x,y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour lesquels x>0.

10. On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2} + e^x$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -ye^y(2+y)$.

11. Un point M(x,y) de U est un point critique de g si,et seulement si ,
$$\begin{cases} \partial_1 g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2} + e^x = 0 \\ \partial_2 g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -ye^y(2+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 + x^2 e^x = 0 \\ y = 0 \, ou \, y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ y = 0 \, ou \, y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \, ou \, y = -2 \end{cases}$$
On obtient donc bien les deux points critiques de g : $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$.

12. f est évidemment de classeC^2 sur l'ouvert U et ses dérivées secondes sont :
$$\partial_{1,1}^2 g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3} + e^x; \ \partial_{1,2}^2 g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$
$$et \ \partial_{2,2}^2 g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^y(2 + 4y + y^2)$$
D'où la matrice Hessienne de g en $(\alpha, 0)$: $\triangle^2 g(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
Cette matrice ayant 2 valeurs propres de signes opposés , g n'a pas d'extremum local en $(\alpha, 0)$.

13. Toujours avec les mêmes dérivées partielles secondes ,on obtient la matrice Hessienne de g en $(\alpha, -2)$: $\triangle^2 g(\alpha, -2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$
Cette matrice ayant 2 valeurs propres strictement posirives , g admet un minimum local en $(\alpha, -2)$.

14. Le calcul de $g(\alpha, -2) = \frac{1}{\alpha} + e^\alpha - 4e^{-2}$ n'est pas très utile ici .
En effet, si on fixe la valeur de x (à $x_0 = \alpha$, par exemple) ,on a :
$$\lim_{y \to +\infty} g(\alpha, y) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\alpha} + e^\alpha - y^2 e^y = -\infty$$
Ce qui montre que g n'a pas de minimun global en $(\alpha, -2)$.

EXERCICE 3:

1. étude du noyau de f :

 (a) $f^2 + i \neq \theta$ donc il existe un vecteur x_0 de E tel que $(f^2+i)(x_0) \neq 0$, mais comme $f \circ (f^2+i) = 0$,on a aussi , $f \circ (f^2+i)(x_0) = 0$.
 Le vecteur $(f^2+i)(x_0)$ est donc un vecteur non nul du noyau de f , f n'est donc pas injectif , et a fortiori pas bijectif non plus .

 (b) On a répondu partielleement dans de (a) : il suffit de prendre $u = (f^2+i)(x_0)$ où $x_0$est un vecteur vérifiant $(f^2+i)(x_0) \neq 0$.
 Ce vecteur u est alors un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.
 Par conséquent , u est alors un vecteur propre de associé à la valeur propre 0

2. $f \circ (f^2+i) = 0$ donc $X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de f.
 Comme 0 est l'unique racine réelle de $X(X^2+1)$ c'est aussi l'unique valeur propre possible de f.
 On a donc montré $Sp(f) \subset \{0\}$. Or d'après le 1.(b) ,on a $0 \in Sp(f)$ donc $\boxed{Sp(f) = \{0\}}$.
3. De façon classique : Si f était diagonalisable, comme il admet 0 pour unique valeur propre , il existerait une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ formée de vecteurs propres de f , et donc tous associés à 0.
 On aurait alors pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ de E , $f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) = 0$.
 Ce qui contredirait l'hypothèse $f \neq \theta$, c'est donc que f n'est pas diagonalisable.
4. Sachant que $f \neq \theta$, il existe un vecteur non nul x_1 de E tel que $f(x_1) \neq 0$.
 Mais comme les endomorphismes f et f^2+i commutent , on a $(f^2+i) \circ f = f \circ (f^2+i) = 0$ et donc $(f^2+i)(f(x_1)) = 0$.
 On a $f(x_1) \neq 0$ et $(f^2+i)(f(x_1)) = 0$. donc f^2+i n'est pas bijectif.
 En posant $v = f(x_1)$ défini plus haut : on a bien $v \neq 0$ et $(f^2+i)(v) = 0$ donc $f^2(v) = -i(v) = -v$.

5. v_2 et v_3 étant ainsi définis , on a $f(v_3) = f(f(v_2) = f^2(v_2) = -v_2$.
6. $B = (v_1, v_2, v_3)$.

 (a) Si λ_1,λ_2,λ_3 sont trois réels tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ alors en composant par f et en utilisant sa linérarité , on obtient $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3) = 0$
 Comme $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = -v_2$,on obtient (1) : $\lambda_2 v_3 - \lambda_3 v_2 = 0$.
 Et toujours en composant par f : $\lambda_2 f(v_3) - \lambda_3 f(v_2) = 0$ soit donc (2) : $-\lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3 = 0$.
 Par combinaison linéaire (pour éliminer les v_3) :
 $\lambda_3(1) + \lambda_2(2)$ donne $\lambda_3(\lambda_2 v_3 - \lambda_3 v_2) + \lambda_2(-\lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3) = -(\lambda_3^2 + \lambda_2^2)v_2 = 0$.
 Et puisque $v_2 \neq 0$, on obtient $\lambda_3^2 + \lambda_2^2 = 0$,ce qui n'est possible que si $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$.
 Ce qui nous amène $\lambda_1 v_1 = 0$ et donc aussi $\lambda_1 = 0$.
 Ouf , on a montré que la famille $B = (v_1, v_2, v_3)$ est libre dans E .
 De plus , son cardinal étant égal à la dimension de E ,c'est une base de E.

 (b) Comme $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = -v_2$,la matrice de f dans la base $B = (v_1, v_2, v_3)$ est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Si a,b et c sont trois réels tels que $aA + bB + cC = 0$, on obtient :
 $a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $a = b = c = 0$.
 La famille (A, B, C) est donc libre et (par définition) génératrice de F,ça en fait donc une base de F, qui est par conséquent un espace vectoriel de dimension 3.
8. Si $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & a & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ alors $CM = MC$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -w & -a & -b \\ t & u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ 0 & v & -u \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$$

Qui se traduit par $z = y = w = t = 0; a = -v;\ et\ b = u$ et par conséquent par $M = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & b & -a \\ 0 & a & b \end{pmatrix} =$
$x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = xA + bB + aC.$
on vient de montrer que $CM = MC \Longleftrightarrow M \in F$. et donc $\underline{\{M \in M_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = F}$

9. .résolution d'une équation dans F :

   (a) comme $aA + bB + cC = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$ on a

   $$(aA + bB + cC)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix} = a^2 A + (b^2 - c^2)B + 2bcC$$

   (b) En choisissant M sous la forme $M = aA + bB + cC = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$

   d'après les calculs du (a) , on a $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = 4; b^2 - c^2 = 5\ et\ 2bc = 12$

   et on obtient une solution en la matrice $\boxed{M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$, obtenue avec $\underline{a = 2; b = 3\ et\ c = 2}$.

10. Dans la base B , on a

$$mat(g) = mat(f^2 - i) = mat(f^2) - mat(i) = C^2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = G$$

C'est une matrice inversible , donc g est bijectif et sa matrice dans B est

$$mat(g)^{-1} = G^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = -I - \tfrac{1}{2}C^2 = mat(-i - \tfrac{1}{2}f^2).$$

Par conséquent $\underline{g^{-1} = -i - \frac{1}{2}f^2}$.