corrigé ESCP 2000 eco par Pierre Veuillez

Exercice 1

Dans tout l'exercice, α désigne un paramètre réel. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. **a)** En lisant la question 2) on teste $A_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $\phi_\alpha(1,1,-1) = 1\,(1,1,-1)$

Donc 1 est bien valeur propre deϕ_α et $(1,1,,-1)$ est un vecteur propre associé.

b) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$u \in E_1 \iff \phi_\alpha(u) = u \iff (1) \begin{cases} -2x + (2-\alpha)\,y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x - \alpha z = 0 \\ 2x + (\alpha-2)\,y + \alpha z = 0 \end{cases}$

– si $\alpha \neq 0$ alors $(1) \iff (2) \begin{cases} x = -z \\ (2-\alpha)\,y + (2-\alpha)\,z = 0 \\ (\alpha-2)\,y + (2-\alpha)\,z = 0 \end{cases}$

– si de plus $\alpha \neq 2$ alors $(2) \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$ et $E_1(\alpha) = \text{Vect}\,(1,1,-1)$ donc (uns seul vecteur non nul)

Avec $f_1 = (1,1,-1)$, la famille (f_1) est une base de $E_1(\alpha)$

– si $\alpha = 2$ alors $(2) \iff x = -z$ et

$E_1(2) = \{(x,y,-x)\ /\ x,y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,((1,0,-1),(0,1,0))$

famille libre et $((1,0,-1),(0,1,0))$ est une base de $E_1(2)$.

– si $\alpha = 0$ alors $(1) \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff x = y$ donc

$E_1(0) = \{(x,x,z)\ /\ x,z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,((1,1,0),(0,0,1))$ et cette famille libre forme une base de $E_1(0)$.

2. On considère les vecteurs

$$f_1 = (1,1,-1) \qquad \text{et} \qquad f_2 = (1,1,-2)$$

et on note F_1 le sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par f_1 et f_2.

a) La famille est libre : si $xf_1 + yf_2 = 0$ alors $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x - 2y = 0 \quad L_2 + L_1 \end{cases}$ donc $y = 0$ et $x = 0$

Elle est génératrice aussi, donc c'est une base de F_1.

b) On test sur f_1 et f_2 :

On a vu que $\phi_\alpha(f_1) = f_1$Montrer que l'image par ϕ_α de tout vecteur de F_1 appartient à F_1.

Et $\begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \alpha+1 \\ -\alpha-2 \end{pmatrix}$ donc $\phi_\alpha(f_2) = \alpha f_1 + f_2 \in F_1$

Donc pour tout $u = xf_1 + yf_2 \in F_1$ on a $\phi_\alpha(u) = x\phi_\alpha(f_1) + y\phi_\alpha(f_2) \in F_1$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } u \in F_1 : \phi_\alpha(u) \in F_1}$

c) Soit $\widehat{\phi_\alpha}$ l'endomorphisme de F_1 induit par ϕ_α, c'est à dire vérifiant, pour tout vecteur V de F_1,
$\widehat{\phi_\alpha}(V) = \phi_\alpha(V)$.
On a vu que $\widehat{\phi_\alpha}(f_1) = f_1$ et $\widehat{\phi_\alpha}(f_2) = \alpha f_1 + f_2$, d'où les coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ et la matrice M de $\widehat{\phi_\alpha}$ dans $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que, pour tout réel α, l'endomorphisme ϕ_α admet la valeur propre $\alpha - 1$ et que l'on peut trouver un vecteur f_3 de $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de α, qui soit, pour tout réel α, vecteur propre de ϕ_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.
On résout pour cela, avec $u = (x, y, z)$: $\phi_\alpha(u) = (\alpha - 1)u \iff_\alpha (A_\alpha - (\alpha - 1) I) U = 0$

$$\iff \begin{cases} -\alpha x + (2-\alpha) y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x + (2-\alpha) y - \alpha z = 0 & L_2 - L_1 \\ 2x + (\alpha - 2) y + 2z = 0 & L_3 + L_1 \end{cases},$$

$$\iff (1) \begin{cases} -\alpha x + (2-\alpha) y - \alpha z = 0 \\ 0 = 0 \\ (2-\alpha) x + (2-\alpha) z = 0 \end{cases}$$

– si $\alpha \neq 2$: $(1) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$
– si $\alpha = 2$: $(1) \iff x + z = 0$

Donc $f_3 = (-1, 0, 1)$ est une vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha - 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. On a donc

$$f_1 = (1, 1, -1), \quad f_2 = (1, 1, -2) \quad \text{et} \quad f_3 = (-1, 0, 1)$$

a) Soient x, y et z réels.
Si $xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0$ alors $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ d'où $x = -y$ et $z = 0$ et $y = 0$ par substitution.
Donc la famille est libre et de cardinal 3.
Conclusion : $\boxed{(f_1, f_2, f_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$. et comme
$\phi_\alpha(f_1) = f_1$: $\phi_\alpha(f_2) = \alpha f_1 + f_2$ et $\phi_\alpha(f_3) = (\alpha - 1) f_3$ la matrice de ϕ_α dans cette base est donc

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

b) Donc si $\alpha = 0$ alors ϕ_α est diagonalisable (diagonalisée sur (f_1, f_2, f_3))
Et si .$\alpha \neq 0$, comme N est triangulaire, les seules valeurs propres de ϕ_α sont 1 et $\alpha - 1$.
On détermine la dimension de chaque sous espace propre :
– Si $\alpha = 2$, la seule valeur propre est 1 et le sous espace propre associé $E_1(2)$ est de dimension 2. Donc ϕ_2n'est pas diagonalisable.
– Si $\alpha \neq 2$ le sous espace propre associé à 1 est de dimension 1 et celui associé à $(\alpha - 1) \neq 1$ est de dimension 1 également. Donc ϕ_α n'est pas diagonalisable.

Conclusion : $\boxed{\text{La seule valeur pour laquelle } \phi_\alpha \text{ est diagonalisable est } \alpha = 0}$

Exercice 2

I. Etude d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire

Etant donné un paramètre réel $\alpha > 0$, on note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de réels qui vérifient, pour tout n positif, la relation

$$u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$

1. La suite u est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
Son équation caractéristique est : $x^2 - \alpha x - \alpha = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = \alpha^2 + 4\alpha > 0$ et donc a deux racines
$r = \frac{\alpha-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $s = \frac{\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}$. et avec $R = (r_n)_{n\geq 0}$ et $S = (s_n)_{n\geq 0}$
on a donc $\mathcal{E} = \left\{(xr^n + ys^n)_{n\in\mathbb{N}} / x, y \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\,(R, S)$.
La famille est génératrice et libre ; en effet :
Si $xR + yS = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $xr^n + ys^n = 0$ et en particulier pour $n = 0$: $xr^0 + ys^0 = 0$ donc $x = -s$ et pour $n = 1$: $xr + ys = x(r - s) = 0$ donc $x = y = 0$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{avec } r = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\alpha}}{2} \text{ et } s = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\alpha}}{2} \\ (R,S) \text{ forme une base de } \mathcal{E}\end{array}}$

Par inégalité triangulaire : $\left|\alpha - \sqrt{\Delta}\right| < |\alpha| + \left|\sqrt{\Delta}\right| = \alpha + \sqrt{\Delta}$ inégalité stricte car α et $\sqrt{\Delta}$ ne sont pas de même signe.
Conclusion : $\boxed{|r| < |s|}$

2. Etant donné un élément $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{E}$ s'écrivant $U = aR + bS$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
On a en particulier $\begin{cases} a + b = u_0 & \text{pour } n = 0 \\ ar + bs = u_1 & \text{pour } n = 1 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = u_0 - b \\ (u_0 - b)\,r + bs = u_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = u_0 - b = \dfrac{-u_1 + \left(r + \sqrt{\Delta}\right) u_0}{\sqrt{\Delta}} = \dfrac{-u_1 + su_0}{\sqrt{\Delta}} \\ b = \dfrac{u_1 - ru_0}{s - r} = \dfrac{u_1 - ru_0}{\sqrt{\Delta}} \end{cases}$$

3. On suppose, dans cette question, que l'on a $\quad 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
Soit $U = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{E}$.

a) On vérifie que $|s| < 1$:

$$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2} < 1 \Longleftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} < 2 - \alpha$$
$$\Longleftrightarrow \alpha^2 + 4\alpha < 4 - 4\alpha + \alpha^2$$
$$\Longleftrightarrow \alpha < \frac{1}{2} \text{ qui est vrai}$$

Donc $|s| < 1$ et comme $|r| < |s|$ alors $r^n \to 0$ et $s^n \to 0$
Conclusion : $\boxed{\text{a suite } U \text{ converge vers 0.}}$

b) Si $u_1 - u_0 r$ n'est pas nul,
alors $b \neq 0$ et donc $u_n = s^n\left(a\left(\dfrac{r}{s}\right)^n + b\right) \to \infty$ avec le signe de b car $\left|\dfrac{r}{s}\right| < 1$
Dans le cas $b < 0$, $u_n \to -\infty$, donc pour tout A, (par exemple $A = -1000$) il existe un rang r_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $u_n \leq A = -1000$ donc $u_n < 0$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln|u_n|}{n} = \frac{\ln -u_n}{n} &= \frac{1}{n}\left[\ln\left(s^n\right) + \ln\left(-a\left(\frac{r}{s}\right)^n - b\right)\right] \\ &= \ln(s) + \frac{1}{n}\ln\left(-a\left(\frac{r}{s}\right)^n - b\right) \\ &\to \ln(s)\end{aligned}$$

et de même si $b > 0$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln|u_n|}{n} = \ln s}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|u_n|}{n} = \ln s$$

c) Si, au contraire, $b = u_1 - u_0 r$ est nul et si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas identiquement nulle (donc si $a \neq 0$)
alors $u_n = ar^n$ et comme $r < 0$, pour tout entier n positif, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires.
On aura donc $\ln|u_n| = n\ln(-r) + \ln|a|$
Conclusion : $\boxed{\ln|u_n| \sim n\ln(-r)}$

4. On suppose, dans cette question, que l'on a $\dfrac{1}{2} < \alpha$.
Comme $s < 1 \iff \alpha < \frac{1}{2}$, pour $\frac{1}{2} < \alpha$ on aura $s^n \to +\infty$ et donc, si $b \neq 0$ alors $u_n \sim bs^n$ et $u_n \to \infty$
Et pour $b = 0$, il faut tester si $-1 < r < 0$:

$$\begin{aligned}-1 < r \iff -1 &< \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2} \\ &\iff \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} < 2 + \alpha \\ &\iff \alpha^2 + 4\alpha < 4 + 4\alpha + \alpha^2 \\ &\iff 0 < 4 \text{ qui est vrai}\end{aligned}$$

Donc $-1 < r < 0$ et r^n tendra vers 0 donc la suite U sera bornée.
Conclusion : $\boxed{\text{pour } \alpha < \tfrac{1}{2},\ U \text{ de } \mathcal{E} \text{ est bornée si et seulement si } b = u_1 - u_0 r = 0}$
L'ensemble $\mathcal{B}$ des suites bornée est donc $\{aR/a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(R)$
Conclusion : $\boxed{\text{pour } \alpha > \tfrac{1}{2},\ \mathcal{B} \text{ est un sous espace de } \mathcal{E} \text{ de dimension 1}}$

II. Etude d'une récurrence non linéaire

Soit β un réel strictement positif. On note $m = \min(1, \beta)$ le plus petit des nombres 1 et β et $M = \max(1, \beta)$ le plus grand de ces deux nombres.
Soit β un réel strictement positif. On note $m = \min(1, \beta)$ le plus petit des nombres 1 et β et $M = \max(1, \beta)$ le plus grand de ces deux nombres.
On considère la suite $V = (v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $v_0 = 0$, $v_1 = \beta$ et, pour tout n positif, la relation
N.B. ON sait que $0 \leq \min(1, \beta) \leq 1$ et $\min(1, \beta) \leq \beta$ de même pour le $\max(1, \beta) \geq 1$ et $\max(1, \beta) \geq \beta$

$$v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$$

1. Récurrence particulière :

On montre par récurrence, que pour tout n strictement positif, l'inégalité $m \leq v_n \leq 4M$ **et** $m \leq v_{n+1} \leq 4M$ (pour connaître le terme suivant, il faut connaître les deux précédents)

(c'est une hypothèse de récurrence "forte sir on le suppose pour tout $k \leq n$)

- pour $n = 1$: On a $v_1 = \beta$ donc $m \leq v_1 \leq M \leq 4M$ car $M \geq 1$
  et $v_2 = \sqrt{v_1}$ donc $\sqrt{m} \leq v_2 \leq 2\sqrt{M}$ car $\sqrt{}$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que tous les termes sont positifs.
  Reste à compléter l'inégalité : comme $m \in [0, 1]$ alors $m^2 - m = m(m-1) \leq 0$ et $m^2 \leq m$ et donc $m \leq \sqrt{m}$
  et comme $M \geq 1$ alors $M^2 \geq M$ donc $M \geq \sqrt{M}$ et $2\sqrt{M} \leq 2M \leq 4M$
  Donc $m \leq v_2 \leq 4M$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq v_n \leq 4M$ et $m \leq v_{n+1} \leq 4M$
  alors $\sqrt{m} \leq \sqrt{v_n} \leq 2\sqrt{M}$ et $\sqrt{m} \leq \sqrt{v_{n+1}} \leq 2\sqrt{M}$ donc $2\sqrt{m} \leq v_{n+2} \leq 4\sqrt{M}$
  On a vu que $\sqrt{M} \leq M$ et que $\sqrt{m} \geq m$ donc $2\sqrt{m} \geq 2m \geq m$ car $m \geq 0$ et $m \leq v_{n+2} \leq 4M$
  et on avait déjà par hypothèse la propriété sur v_{n+1}
- *Conclusion :* $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : m \leq v_n \leq 4M}$

1. Si la suite V admet une limite, cette limite est finie et positive stricte ($\geq m > 0$) puisque $0 < m \leq v_n \leq 4M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   Soit ℓ sa limite. Quand $n \to +\infty$, on a alors
   - $v_n \to \ell$ donc $\sqrt{v_n} \to \sqrt{\ell}$ car $\sqrt{}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\ell \geq 0$
   - et de même $\sqrt{v_{n+1}} \to \sqrt{\ell}$
   - $v_{n+2} \to \ell$

   Et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$ par passage à la limite $\ell = 2\sqrt{\ell}$ et $\sqrt{\ell} = 2$ car $\ell \neq 0$ et $\ell = 4$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si } V \text{ a une limite, cette limite est } 4}$

On se propose de montrer que, pour tout β strictement positif, la suite V admet effectivement pour limite 4.

3. pour tout n positif, on reconnaît des quantités conjuguées, que l'on fait apparaître :

$$\begin{aligned} v_{n+2} - 4 &= \sqrt{v_{n+1}} - 2 + \sqrt{v_n} - 2 \\ &= \frac{\left(\sqrt{v_{n+1}} - 2\right)\left(\sqrt{v_{n+1}} + 2\right)}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{v_n - 4}{\sqrt{v_n} + 2} \\ &= \frac{v_{n+1} - 4}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{v_n - 4}{\sqrt{v_n} + 2} \end{aligned}$$

et par inégalité triangulaire

$$|v_{n+2} - 4| \leq \frac{|v_{n+1} - 4|}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{|v_n - 4|}{\sqrt{v_n} + 2}$$

4. On pose $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{m} + 2}$ et on considère la suite $U = (u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$ et les conditions initiales $u_0 = |v_1 - 4|$ et $u_1 = |v_2 - 4|$.

On montre par récurrence que pour tout n strictement positif, $|v_n - 4| \leq u_{n-1}$. et $|v_{n+1} - 4| \leq u_n$:

- pour $n = 1$:
  on a $u_0 = |v_1 - 4|$ et $u_1 = |v_2 - 4|$ donc les inégalités sont vérifiées.
- Sont $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|v_n - 4| \leq u_{n-1}$. et $|v_{n+1} - 4| \leq u_n$

alors

$$|v_{n+2}-4| \leq \frac{|v_{n+1}-4|}{\sqrt{v_{n+1}}+2} + \frac{|v_n-4|}{\sqrt{v_n}+2}$$
$$\leq \frac{u_n}{\sqrt{v_{n+1}}+2} + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{v_n}+2}$$

et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n \geq m > 0$ alors $\sqrt{v_n}+2 \geq \sqrt{m}+2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{v_n}+2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{m}+2} = \alpha$

et donc également (pour tout n) $\dfrac{1}{\sqrt{v_{n+1}}+2} \leq \alpha$

Finalement $|v_{n+2}-4| \leq \alpha(u_{n+1}+u_n) = u_{n+2}$

– Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|v_n - 4| \leq u_{n-1}$

5. Comme $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{m}+2} < \dfrac{1}{2}$ alors (3)a)) la suite u converge vers 0

et par encadrement, $0 \leq |v_n - 4| \leq u_{n-1}$ on a alors $v_n \to 4$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } V \text{ converge vers } 4}$

6. Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui lise un entier N et un réel β et qui affiche, en sortie, les N premiers termes de la suite V.

Il faudra conserver les deux termes précédents pour calculer le suivant, et donc stocker la valeur suivante avant de réaffecter.

$v_n \leftrightarrow$ `V` et $v_{n+1} \leftrightarrow$ `V1` et $v_{n+1} \leftrightarrow$ `V2`

```
Program suite ;
var beta,V,V1,V2 :real ; N,i :integer ;
begin
    writeln('beta et N ?') ;
    readln(beta,N) ;
    V :=0 ;V1 :=beta ;
    writeln(V) ;wrtielen(V1) ;
    for i :=2 to N do
    begin
        V2 :=sqrt(V)+sqrt(V1) ;
        V :=V1 ;V1 :=V2 ;
        writlen(V2) ;
    end ;
end.
```

Exercice 3

Sachant qu'un appareil a fonctionné correctement pendant un certaine durée x, on s'intéresse à la probabilité qu'il continue à bien fonctionner pendant encore au moins une durée y. Pour cela on convient de représenter la durée de vie de ce type d'appareil par une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé dont on notera la probabilité P. L'exercice a pour objet l'étude de quelques fonctions liées à cette durée de vie.

I. On suppose d'abord que X prend ses valeurs dans N^* et que, pour tout n de N^*, $P(X = n)$ n'est pas nul.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$p_n = \mathbf{P}(X = n), \qquad G_n = \mathbf{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{p_n}{G_n}$$

1. On a $G_n = \mathbf{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = p_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k > p_n$ car $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
et p_n et G_n étant des probabilités, (et $P(X = n)$ n'est pas nul.) on a donc $0 < p_n < G_n \leq 1$
et en divisant de part et d'autre par $G_n > 0$:

$$\frac{0}{G_n} < \frac{p_n}{G_n} < \frac{G_n}{G_n}$$

Conclusion : $\boxed{0 < Z_n < 1}$

2. Soit n un entier naturel.

$$\mathrm{P}_{X\geq n}\left(X \geq n+1\right) = \frac{\mathrm{P}\left(X \geq n+1 \cap X \geq n\right)}{\mathrm{P}\left(X \geq n\right)}$$

et comme $(X \geq n+1 \cap X \geq n) = (X \geq n+1)$ car $n+1 \geq 1$ alors

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{X\geq n}\left(X \geq n+1\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(X \geq n+1\right)}{\mathrm{P}\left(X \geq n\right)}\\ &= \frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{G_n - p_n}{G_n} = 1 - \frac{p_n}{G_n}\\ &= 1 - Z_n\end{aligned}$$

1. **a)** Comme $\mathrm{P}_{X\geq n}\left(X \geq n+1\right) = 1 - Z_n$, si $\left(Z_n\right)_{n\geq 0}$ est constante alors $\left[\mathrm{P}_{X\geq n}\left(X \geq n+1\right)\right]_{n\geq 0}$ l'est aussi
et comme $Z_n = 1 - \mathrm{P}_{X\geq n}\left(X \geq n+1\right)$ la réciproque est également vraie.
Conclusion : $\boxed{\left[\mathrm{P}_{X\geq n}\left(X \geq n+1\right)\right]_{n\geq 0} \text{ est constante si et seulement si } \left(Z_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ l'est aussi}}$

b) Si X suit une loi géométrique, avec p son paramètre, on a $\mathrm{P}\left(X \geq n\right) = (1-p)^{n-1}$ (échec jusqu'au $n - 1^{ème}$) et $Z_n = \dfrac{p_n}{G_n} = \dfrac{(1-p)^{n-1}p}{(1-p)^{n-1}} = p$ donc Z est constante
Conclusion : $\boxed{\text{Si } X \text{ suit une loi géométrique les conditions précédentes sont vérifiées.}}$

c) Réciproquement, on suppose qu'il existe une constante p appartenant à $]0,1[$ telle que la suite $\left(Z_n\right)_{n\geq 0}$ soit la suite constante égale à p
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{G_{n+1}}{G_n} = 1 - p$ donc la suite G est géométrique de raison $(1-p)$ et $G_n = (1-p)^{n-1} G_1 = (1-p)^{n-1}$ donc

$$\begin{aligned}p_n &= G_n - G_{n+1}\\ &= (1-p)^{n-1} - (1-p)^n\\ &= (1-p)^{n-1} p\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si la suite } Z \text{ est constante } (= p) \text{ alors } X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(p\right)}$

4. Si, pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, la suite $\left(\dfrac{p_{n+m}}{p_n}\right)_{ne0}$ est décroissante,

Ces quotients apparaissent dans $\dfrac{G_n}{p_n}$. Pour $n \geq 1$ (pour avoir $p_n \neq 0$) on a

$$\frac{1}{Z_n} = \frac{G_n}{p_n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{p_k}{p_n} \overset{h=k-n}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{p_{n+h}}{p_n} \text{ et donc}$$

$$\frac{1}{Z_{n+1}} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{p_{n+1+h}}{p_{n+1}}$$

la suite $\left(\dfrac{p_{n+h}}{p_n}\right)$ étant décroissante, pour tout $h \geq 1$: $\dfrac{p_{n+1+h}}{p_{n+1}} \leq \dfrac{p_{n+h}}{p_n}$ et en sommant les inégalités, $\dfrac{1}{Z_n} \geq \dfrac{1}{Z_{n+1}} > 0$ et donc $Z_n \leq Z_{n+1}$

Ce qui est encore vrai avec $Z_0 = 0 \leq Z_1$

Conclusion : Si, pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, la suite $\left(\dfrac{p_{n+m}}{p_n}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante, $(Z_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $(1 - Z_n)_{n\geq 0} = (\mathrm{P}_{X\geq n}(X \geq n+1))_{n\geq 0}$ est décroissante.

(On dit alors qu'il y a vieillissement de l'appareil dont X est la durée de vie.)

II. On suppose maintenant que la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et admet une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On pose, pour tout réel strictement positif x,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad Z(x) = \frac{f(x)}{G(x)}$$

1. **a)** Si x et y sont des réels strictement positifs, on pose $H(x,y) = \dfrac{G(x+y)}{G(x)}$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ alors G est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $G'(x) = -f(x)$ (lien entre la fonction de répartition $(1-G)$ et la densité) donc G est strictement décroissante et tend vers 0 en $+\infty$ donc elle est strictement positive.

H est donc de classe C^1 sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ comme quotient (dénominateur non nul) de fonctions C^1

pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= \frac{G'(x+y)G(x) - G(x+y)G'(x)}{G(x)^2} \\
&= \frac{-f(x+y)G(x) + G(x+y)f(x)}{G(x)^2} \\
&= \frac{G(x+y)}{G(x)}\left(\frac{f(x)}{G(x)} - \frac{f(x+y)}{G(x+y)}\right) \\
&= \frac{G(x+y)}{G(x)}(Z(x) - Z(x+y))
\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{X\geq x}(X \geq x+y) &= \frac{\mathrm{P}(X \geq x+y \cap X \geq x)}{\mathrm{P}(X \geq x)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X \geq x+y)}{\mathrm{P}(X \geq x)} \text{ car } y \geq 0 \\
&= \frac{G(x+y)}{G(x)} = H(x,y)
\end{aligned}$$

Si Z est croissante alors $(Z(x) - Z(x+y)) \leq 0$ pour tout $y \geq 0$ donc $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) \leq 0$ et $x \to H(x,y)$ est décroissante.

Récipoquement, si $x \to H(x,y)$ est croissante alors, pour tout $y \geq 0$, $Z(x) - Z(x+y)$ et la fonction Z est croissante.

Conclusion : $x \to \mathrm{P}_{X\geq x}(X \geq x+y)$ est décroissante si et seulement si Z est une fonction croissante.

2. **a)** Si la loi de X est une loi exponentielle $\varepsilon(\alpha)$, alors $G(x) = \mathrm{P}(X \geq x) = e^{-\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $Z(x) = \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha x}} = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$
donc la fonction Z est constante.

b) Si Z est la fonction constante égale au réel strictement positif λ, alors
$f(x) = \lambda G(x)$
$g : x \mapsto e^{\lambda x} G(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lambda e^{\lambda x} G(x) + e^{\lambda x} G'(x) \\ &= e^{\lambda x}\left[f(x) - f(x)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $G'(x) = -f(x)$
Donc $x \mapsto e^{\lambda x} G(x)$ est constant et vaut 1 en $x = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : e^{\lambda x} G(x) = 1$ et $G(x) = e^{-\lambda x}$ et

Conclusion : $\boxed{\text{Si } Z \text{ est la fonction constante égale au réel strictement positif } \lambda,\ X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)}$