Exercice 1

1. On considère la matrice A définie par:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

a) i. $(A-\alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} (-1-\alpha)\,x - y + 2z = 0 & L_1 + (1+\alpha)\,L_2 \to L \\ x + (2-\alpha)\,y - z = 0 & L_2 \to L_1 \\ -2x - y + (3-\alpha)\,z = 0 & L_3 + 2L_2 \to L_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + (2-\alpha)\,y - z = 0 \\ \left[(2-\alpha)(1+\alpha) - 1\right] y + (1-\alpha)\,z = 0 \\ (3-2\alpha)\,y + (1-\alpha)\,z = 0 & L_3 - L_2 \to L_3 \end{cases}$

$\iff (1) \begin{cases} x + (2-\alpha)\,y - z = 0 \\ (-\alpha^2+\alpha+1)\,y + (1-\alpha)\,z = 0 \\ (\alpha^2 - 3\alpha + 2)\,y = 0 \end{cases}$

On résout : $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \iff \alpha = 1$ ou $\alpha = 2$

- Donc si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$: (1) $\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ (1-\alpha)\,z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$
  car$1-\alpha \neq 0$
  Donc α n'est pas valeur propre
- Si $\alpha = 1$ alors (1) $\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ et les solutions sont
  $E_1 = \text{Vect}\left((1,0,1)\right) \neq \{0\}$ donc 1 est valeur propre.
- Si $\alpha = 2$ alors (1) $\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$ et les solutions sont
  $E_2 = \text{Vect}\left((1,-1,1)\right) \neq \{0\}$ donc 2 est valeur propre

Conclusion : $\boxed{\text{1 et 2 sont les seules valeurs propres de } A}$

ii. On a une base de chaque sous espace propre qui sont donc de dimension 1.
$\dim E_1 + \dim E_2 \neq \dim \mathbb{R}^3$
Conclusion : $\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

b) Ambiguïté de l'énnoncé : faut-il considérer un vecteur V particumier (i.e $V = (1,0,1)$) ou résoudre pour tout veceur mV de E_1 : $V = \alpha\,(1,0,1)$? C'est plutot le second cas que je comprends.
On a alors $V = \alpha\,(1,0,1)$ Soit $W = (x,y,z)$
On a $\phi\,(W)$ par ses coordonénes :
$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y+2z \\ x+2y-z \\ -2x-y+3z \end{pmatrix}$ donc $\phi(W) = V + W \iff \begin{cases} -x-y+2z = \alpha + x \\ x+2y-z = y \\ -2x-y+3z = \alpha + z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -2x-y+2z = \alpha & L_1 + 2L_2 \\ x+y-z = 0 \\ -2x-y+2z = \alpha & L_3 = L_1! \end{cases} \iff \begin{cases} y = \alpha \\ x = z - \alpha \end{cases}$ et pour $z = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{une solution est } W = (-\alpha, \alpha, 0)}$

c) On montre que la famille (U,V,W) est libre :
Si (1) : $xU+yV+zW=0$ alors (2) :

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(xU+yV+zW) \\ &= x\phi(U)+y\phi(V)+z\phi(W) \\ &= 2xU+yV+z(V+W) \end{aligned}$$

et en éliminant W par $(1)-(2)$:

$$-xU-zV=0$$

et comme U et V sont associés à 2 valeurs propres disitinctes, ils forment une famille libre d'où $x=z=0$ d'où dans (1) : $yV=0$ et $y=0$.

Conclusion : $\boxed{(U,V,W) \text{ est librte de 3 vecteurs donc base de } \mathbb{R}^3}$

d) On a les coordonnées des images :

$\phi(U)=2U=2U+0V+0W$; $\phi(V)=V$ et $\phi(W)=V+W$ donc $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En prenant $U=(1,-1,1)$, $V=(1,0,1)$ et $W=(-1,1,0)$, la matrice dfe passage de la base canonique m$\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}=(U,V,W)$ est $\text{mat}_{\mathcal{C}}\mathcal{B}=P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la formule de changement de base donne alors $B=P^{-1}AP$.

2. Étant données les matrices

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on associe à tout élément (a,b,c) de $\mathbf{R}^3$ la matrice $C_{(a,b,c)}$ définie par:

$$C_{(a,b,c)}=aI+bH+cN$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $C_{(a,b,c)}$ o? (a,b,c) décrit $\mathbf{R}^3$.

a) On a $\mathcal{M}=$Vect(I,H,N) sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et comme la famille (I,H,N) est libre (échelonnée) elle est une base de $\mathcal{M}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \dim \mathcal{M}=3.}$

b) On a $B=I+H+N$ donc $B=C_{(1,1,1)}\in\mathcal{M}$.

c) Comme $C_{(a,b,c)}=\begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est triangulaire et a pour termes diagonaux : $a+b$ et a

Conclusion : $\boxed{C_{(a,b,c)} \text{ est inversible} \iff a\neq 0 \text{ et } a+b\neq 0}$

On constate que $\begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{c}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=I$ donc $C^{-1}_{(a,b,c)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{c}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

d) Comme $C_{(a,b,c)}$.est triangulaire, ces valeurs propres sont $a+b$ et a.

Si $b=0$ la seule valeur propre est a. Donc si elle est diagoalisable on aurait $C_{(a,0,c)} = PaIP^{-1} = aI$ ce qui n'est vrai que si $c=0$ (auquel cas, $C_{(a,0,c)}$ est bien diagonalisable puisque diagonale)

si $b \neq 0$, on cherche les sous espaces propres :

$$\left(C_{(a,b,c)} - (a+b)\,I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{matrix} -by+cz=0 \\ -bz=0 \end{matrix} \Longleftrightarrow z=y=0 \text{ car } b \neq 0$$

Donc le sous espace propre associé à $(a+b)$ valeur propre est Vect $((1,0,0))$ qui est de dimension 1.

$$\left(C_{(a,b,c)} - aI\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} bx=0 \\ cz=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ cz=0 \end{cases}$$ et si $c \neq 0$ alors $z=0$ le sous espace propre associé à a est Vect $(0,1,0)$ qui est de dimension 1.

Donc si $c \neq 0$ alors la somme des dimensions des sous espaces propres n'est pas 3 et la matrice $C_{(a,b,c)}$ n'est pas diagonalisable.

Réciproquement, si $c=0$, la matrice $C_{(a,b,c)}$ est diagonale.

Conclusion : $\boxed{C_{(a,b,c)} \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow c=0}$

Exercice 2

1. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et y strictement positifs, par:

$$G(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$

a) G est de classe C^2 en (x,y) tels que $y \neq 0$ et $x>0$ donc sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-y^2}{y^2 x} \\
\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) &= -\frac{x^2}{y^3} + 1 = \frac{-x^2+y^3}{y^3} \\
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \\
\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x,y) &= -\frac{2x}{y^3} \\
\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{3x^2}{y^4}
\end{aligned}$$

b) Si G a un extremum local surt l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ alors

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ y^3-x^2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y \text{ car } x>0 \text{ et } y>0 \\ y^3-y^2=0 \end{cases}$$

et comme $y^3-y^2=0=y^2(y-1)$ et que $y \neq 0$ alors

Conclusion : $\boxed{\text{le seul point critique de } G \text{ est } (1,1)}$

(c'est le seul point où G est succeptible d'avoir un extremum)

On test si ce poitn est un extrema local :

$r = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(1,1) = 2 : s = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(1,1) = -2 : t = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(1,1) = 3$
et $rt - s^2 = 6 - 4 > 0$
Donc, sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ G a un extremum loclal en $(1,1)$ et comme $r > 0$, c'est un minimum local.
Conclusion : $\boxed{\text{le seul extremum local de } G \text{ est un minimum local en } (1,1)}$

2. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout x strictement positif, par:

$$f(x) = G(x,1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$ qui est donc du signe du polynôme $x^2 - 1$
f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ ert $f''(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ donc f est convexe sur $]0,+\infty[$
En 0^+ : $f(x) \to +\infty$
En $+\infty$: $f(x) = x^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2x^2}\right] \to +\infty$
et $f(x)/x = \frac{x}{2} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{2x} \to +\infty$ donc la courbe représentative de f a une branche parabolique verticale.

x	0		1		$+\infty$
x^2-1		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

i. Une primitive de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ est F définie par $F(x) = \frac{x^3}{6} - x\ln(x) + \frac{1}{2}x$ en effet, F y est dérivable et $F'(x) = f(x)$

ii. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en 0 (f n'y est pas prolongeable par continuité) et pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx &= \left[\frac{x^3}{6} - x\ln(x) + \frac{1}{2}x\right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\varepsilon^3}{6} - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon\right) \\ &\to \frac{2}{3} \text{ quand } \varepsilon \to 0\end{aligned}$$

Donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{2}{3}$

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n})$.

i. Pour encadrer l'intégrale, on encadre le contenu en utilisant le sens de variation de f :
Pour tout entier j vérifiant $1 \le j < n$, on a $j+1 \le n$ et donc $0 < \frac{j}{n} \le \frac{j+1}{n} \le 1$.
Donc f est décroissante sur $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ et pour tout t tel que $\frac{j}{n} \le t \le \frac{j+1}{n}$ on a $f\left(\frac{j}{n}\right) \ge f(t) \ge f\left(\frac{j+1}{n}\right)$.
Et comme $\frac{j}{n} \le \frac{j+1}{n}$ (ordre des bornes)

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right) = \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f\left(\frac{j+1}{n}\right)dt \le \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f\left(\frac{j}{n}\right)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$$

ii. On somme alors les inégalités précédentes de ... 1 à $n-1$ (valeurs de$j$ pour lesquelles l'inégalité est vraie) et on rectifie afin d'avoir S_n :
Pour le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \text{ avec } k=j+1 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Pour le membre de droite :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right) &= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) - f(1)\right] \\
&= S_n - 0
\end{aligned}$$

Et pour le centre :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ (Chasles)}$$

On a donc

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \ \leq S_n$$

ou encore :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

iii. Pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$, f est décroissante sur $[\varepsilon, 1]$ donc $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(x)$ donc

$$\left(\frac{1}{n} - \varepsilon\right) f\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} f\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}x \leq \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et par passage à la lmite dans l'inégalité quand $\varepsilon \to 0$

$$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{0}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) On considère la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ définie précédemment.
Comme $\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^0 f(x)\,dx = 0$ quand $n \to +\infty$ alors $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ par encadrement.
D'autre part, $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$ (car cette intégrale impropre en 0 est convergente)
Alors par l'encadrement

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

on déduit que $S_n \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$
Conclusion : $\boxed{S_n \to \frac{2}{3} \text{ quand } n \to +\infty}$

d) On rappelle que, pour tout entier naturel non nul, on a l'égalité $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

i. On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{(j/n)^2}{2} - \ln(j/n) - \frac{1}{2}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(j/n)^2}{2} - \sum_{j=1}^{n}\ln(j/n) - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2}\sum_{j=1}^{n} j^2 - \ln\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{j}{n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{12n} - \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) \\
&= \frac{-4n^2+3n+1}{12n} + \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

ii. En divisant par n on obtient donc

$$S_n = \frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

Comme

$$\frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2} \to -\frac{1}{3}$$

et que $S_n \to \frac{2}{3}$ alors $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = S_n - \frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} \to \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)}$

N.B. Celà ressemble au théorème sur les sommes de Rieman :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{i}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\ln\left(\frac{i}{n}\right) \to \int_0^1 -\ln(t)\,dt
\end{aligned}$$

si ln est continue sur $[0,1]$ ... ce qui n'est pas le cas.

1 Exercice 3

1. Préliminaire

Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contoent N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

a) L'univers est l'ensemble des résultats possibles.

Ici les résultats sont les listes sans répétition de N boules parmi N (les permutations de N boules)

Les événements sont toutes les parties de l'univers

La probabilité est l'équiprobabilité.

b) Si $i \geq j$ alors l'événement $(X_1 = i) \cap (X_2 = j)$ est impossible (la seconde boule noire vient après la première) donc si $1 \leq j \leq i \leq N$ alors $p(X_1 = i,\ X_2 = j) = 0$

Si $1 \leq i < j \leq N$ alors $(X_1 = i) \cap (X_2 = j)$ signifie que l'on a obtenu une boule noire au $i^{\text{ème}}$ et au $j^{\text{ème}}$ tirage (il n'ya plus besoin de préciser première et deuxième)

Donc $p(X_1 = i,\ X_2 = j) = p\left(N_i \cap N_j\right) = p\left(N_i\right) \cdot p\left(N_j/N_i\right)$

Quand il n'y a pas de conditionnement, toutes les boules sont équiprobables pour le $i^{\text{ème}}$ tirage donc $p\left(N_i\right) = 2/N$

Quand on a obtenu une boule noire au $i^{\text{ème}}$ il ne reste que $N-1$ boules équiprobables (dont une seule noire) donc $p\left(N_j/N_i\right) = 1/\left(N-1\right)$

Finalement

$$p(X_1 = i \cap\ X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leq j \leq i \leq N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} \quad 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

c) ici on dispose de la loi du couple. On nous demande les lois marginales.

Mais pour la loi de X_1 il est plus rapide de raisonner directement :

$X_1\left(\Omega\right) = [[1, N-1]]$ car on obtient la première noire au plus tôt au premier tirage et au plus tard à l'avant dernier (s'il reste les deux noires). Et pour $i \in [[1, N-1]]$ on a $(X_1 = i) = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{i-1} \cap N_i$

Donc

$$\begin{aligned} p\left(X_1 = i\right) &= p\left(B_1\right) \cdot p\left(B_1/B_2\right) \cdot p\left(B_3/B_1 \cap B_2\right) \\ &\quad \ldots p\left(B_{i-1}/B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{i-2}\right) p\left(N_i/B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{i-1}\right) \end{aligned}$$

le conditionnement donne les boules restantes (équiprobables) et donc la probabilité :

- quand on a retiré une blanche, il reste $N-1$ boules dont $N-3$ blanches
- quand on a retiré 2 blanches, il reste $N-2$ boules dont $N-4$ blanches...
- quand on a retiré $i-2$ blanche, il reste $N-(i-2)$ boules dont $N-i$ blanches
- quand on a retiré $i-1$ blanche, il reste $N-(i-1)$ boules dont 2 noires

Donc

$$p\left(X_1 = i\right) = \frac{N-2}{N} \cdot \frac{N-3}{N-1} \cdot \frac{N-4}{N-2} \cdots \frac{N-i}{N-i+2} \cdot \frac{2}{N-i+1}$$

qui se simplifie en diagonale et il reste les deux premiers termes au numérateur et les deux derniers au dénominateur.

$$p(X_1 = i) = \frac{2(N-i)}{N(N-1)}$$

Remarque : on peut aussi l'écrire d'abored en factorielle en complétant :

$$\begin{aligned} N(N-1)\dots(N-i+2)(N-i+1) &= \frac{N\dots(N-i+1)(N-i)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{(N-i)\dots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{N!}{(N-i)!} \end{aligned}$$

et de même :
$(N-2)\dots(N-i) = (N-2)!/(N-i-1)!$
Remarque : on peut aussi faire un dénombrement direct :
L'univers est l'ensemble des permutations équiproables de N boules. Il y en a $N!$
$(X_1 = i)$ est caractérisé par :

- la liste sans répétition des $i-1$ premières boules blanches parmi $N-2$ blanches
- la première boule noire parmi 2
- la liste sans répétition des $N-i$ boules restantes parmi $N-i$ (permutation)

Donc $|X = i| = A_{N-2}^{i-1} 2(N-i)!$ et

$$\begin{aligned} p(X = i) &= \frac{\frac{(N-2)!}{[N-2-(i-1)]!}2(N-i)!}{N!} = \frac{2(N-i)!(N-2)!}{(N-i-1)!N!} \\ &= \frac{2(N-i)(N-i-1)!(N-2)!}{(N-i-1)!N(N-1)(N-2)!} \\ &= \frac{2(N-i)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

Pour obtenir la loi de X_2 on passe cette fois par la loi marginale :
$X_2(\Omega) = [[2, N]]$ car on a la seconde boule noire au plus tôt au second tirage et au plus tard au dernier.
Soit $j \in [[2, N]]$ alors

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{i \in X_1(\Omega)} p(X_1 = i \cap X_2 = j) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} p(X_1 = i \cap X_2 = j) \end{aligned}$$

comme la loi du couple est donné par deux formules différentes suivant que $i \geq j$ ou que $i < j$ on découpe la somme : $\sum_{i=1}^{N-1} = \sum_{i=1}^{j-1} + \sum_{i=j}^{N-1}$
Mais pour que ce découpage soit valable, il faut que $1 \leq j-1$ (OK) et que $j \leq N-1$
Donc si $j \leq N-1$:

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} + \sum_{i=j}^{N-1} 0 \\ &= \frac{2(j-1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

et pour $j = N$ on a

$$\begin{aligned} P(X_2 = N) &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2}{N(N-1)} \text{ car } i < N \\ &= \frac{2(N-1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

et on retrouve la formule précédente pour $j = N$

Donc la loi de X_2 est donnée par $X_2(\Omega) = [[2, N]]$ et pour tout $j \in [[2, N]]$: $P(X_2 = j) = \dfrac{2(j-1)}{N(N-1)}$

X_1 et X_2 sont indépendantes si pour tout $i \in X_1(\Omega)$ et $j \in X_2(\Omega)$, $p(X_1 = i \cap X_2 = j) = p(X_1 = i)\, p(X_2 = j)$

Ici, expérimentalement, la deuxième apparition du Noire étant toujours après la première elle ne doivent pas être indépendantes.

Il suffit, pour le prouver avec la définition, de trouver **un contre-exemple**.

Comme $(X_1 = 2 \cap X_2 = 2)$ est impossible alors $p(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) = 0$

Alors que $p(X_1 = 2) = \frac{2}{N}$ et $p(X_2 = 2) = \frac{2}{N(N-1)}$ sont tout deux non nuls.

Donc $p(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) \neq p(X_1 = 2)\, p(X_2 = 2)$ et X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

d) i. Pour montrer que deux variables on tla même loi, on peut chercher des relations expérimentales entre les deux .... Ici, il n'y a rien d'évident.
Ou directement, montrer qu'elles ont mêmes valeurs et mêmes proibabilités :
Comme $X_2(\Omega) = [[2, N]]$ alors $(-X_2)(\Omega) = [[-N, -2]]$ et
$(N + 1 - X_2)(\Omega) = [[N + 1 - N, N + 1 - 2]] = [[1, N - 1]] = X_1(\Omega)$
Soit $i \in X_1(\Omega)$ alors $p(N + 1 - X_2 = i) = \dots$ on connait la loi de X_2 et on s'y ramène :
$p(N + 1 - X_2 = i) = p(N + 1 - i = X_2)$ et comme $N + 1 - i \in [[2, N]]$ la valeur est donnée par la loi de X_2
$p(N + 1 - i = X_2) = \dfrac{2(N + 1 - i - 1)}{N(N-1)} = \dfrac{2(N-i)}{N(N-1)} = p(X_1 = i)$
Finalement, X_1 et $N + 1 - X_2$ ont bien la même loi.

ii. Comme X_1 est le rang de la première noire et X_2 celui de la seconde, l'écart entre les deux est au minimum de 1 et au maximum de $N - 1$ (quand on a les boules noires au début et à la fin)
Donc $(X_2 - X_1)(\Omega) = [[1, N]]$
Pour $i \in [[1, N]]$, $(X_2 - X_1 = i) = \bigcup_k (X_2 = k \cap X_1 = k - i)$
la réunion portant sur les valeurs de k telles que $2 \leq k \leq N$ (valeurs possibles pour X_2) et $1 \leq k - i \leq N - 1$ (pour X_1)
On résout la seconde condition par rapport à k (variable de la réunion) :
$1 \leq k - i \leq N - 1 \iff 1 + i \leq k \leq N + i - 1$
Donc pur que les deux condition soient satisfaites : $\left\{ \begin{array}{c} 2 \leq k \leq N \\ 1 + i \leq k \leq N + i - 1 \end{array} \right. \iff$
$1 + i \leq k \leq N$
car $i \geq 1$ donc $i + 1 \geq 2$ et $i \geq 1$ donc $n + i - i \geq N$

$$\begin{aligned} p(X_2 - X_1 = i) &= p\left[\bigcup_{k=i+1}^{N} (X_2 = k \cap X_1 = k - i)\right] \\ &= \sum_{k=i+1}^{N} p(X_2 = k \cap X_1 = k - i) \\ &= \sum_{k=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(N-i+1)}{N(N-1)} \\ &= p(X_1 = i) \end{aligned}$$

Donc la loi de $X_2 - X_1$ est la même que celle de X_2

Remarque :dans la loi du couple, on a utilisé la seconde formule car, pour $1+i \leq k \leq N$ on a $1 \leq k - i < k \leq N$

e) À l'aide des résultats de la question précédente :

i. Comme $N+1-X_2,\ X_2-X_1$ et X_1 on t les mêmes lois, elles ont les mêmes espérances :
Comme $E(N+1-X_2) = N+1-E(X_2)$ et $E(X_2 - X_1) = E(X_2) - E(X_1)$ on a donc :
$\begin{cases} N+1-E(X_2) = E(X_1) \\ E(X_2) - E(X_1) = E(X_1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} N+1 = 3E(X_1) \\ E(X_2) = 2E(X_1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} E(X_1) = \frac{N+1}{3} \\ E(X_2) = 2\frac{N+1}{3} \end{cases}$

ii. On réutilise $N+1-X_2$ a la même loi que X_1 pour en déduire qu'elles ont la même variance :
$V(X_1) = V(N+1-X_2) = (-1)^2 V(X_2) = V(X_2)$ car $N+1$ est une constante ($V(aX+b) = a^2 V(X)$ si ma et b sont des cosntantes)
Donc $V(X_2) = V(X_1)$

iii. on utilise à présent que $X_2 - X_1$ a la même loi que X_1 pour en dédurie qu'ils ont même variance :
$V(X_1) = V(X_2 - X_1) = V(X_2) - 2\mathrm{cov}V(X_1, X_2) + V(X_1) = 2V(X_1) - 2\mathrm{cov}(X_2, X_1)$
et donc $2\mathrm{cov}(X_1, X_2) = V(X_1)$

f) Il reste à calculer

$$\begin{aligned} E\left(X_1^2\right) &= \sum_{k=1}^{N-1} kp(X_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} k\frac{2(N+1-k)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

on factorise les constantes et on développe les produits pour pouvoir découper les sommes

:

$$\begin{aligned}
E\left(X_1^2\right) &= \frac{2}{N(N-1)}\left[\sum_{k=1}^{N-1} k(N+1) - \sum_{k=1}^{N-1} k^2\right] \\
&= \frac{2}{N(N-1)}\left[(N+1)\left(\sum_{k=0}^{N-1} k - 0\right) - \sum_{k=0}^{N-1} k^2 + 0^2\right] \\
&= \frac{2}{N(N-1)}\left[(N+1)\frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}\right] \\
&= 2\left[\frac{N+1}{2} - \frac{2N-1}{6}\right] = \frac{2[N+4]}{6} \\
&= \frac{N+4}{3}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
V(X_1) &= E\left(X_1^2\right) - E(X_1)^2 = \frac{N+4}{3} - \left(\frac{N+1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{11+N-N^2}{9}
\end{aligned}$$

et $V(X_2) = V(X_1) = \dfrac{11+N-N^2}{9}$ et enfin $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \dfrac{V(X_1)}{2} = \dfrac{11+N-N^2}{18}$

2. Dans cette partie, N désigne encore un entier supérieur ou égal à deux.

   a) On considère le programme Turbo-Pascal suivant, où RANDOM(10) désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur dans l'intervalle $[0, 9]$ (la procédure RANDOMIZE sert à initialiser la fonction RANDOM):

```
PROGRAM Tirage;
VAR a,b,c:INTEGER;
BEGIN
     RANDOMIZE;
     a:= RANDOM(10)+1;
     b:= RANDOM(10)+1;
     IF a > b THEN
     BEGIN
          c:=a; a:=b; b:=c;
     END;
     IF a < b WRITELN('(',a,',',b,')');
END.
```

      i. Si a et b contiennent toutes les deux le même nombre, l'ordinateur ne fait rien (on n'a pas `a < b` ni `a` $>$ `b`

      ii. Si a et b contiennent respectivement les nombres 3 et 5 l'ordinateur passe le `a > b` san rien faire puis affiche (3,5)

      iii. Si a et b contiennent respectivement les nombres 10 et 1, il échange leur contenu dans le `a > b` puis affiche (1,10)

b) On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et on désigne par D l'événement: A ne prend pas la même valeur que B.

i. L'univers est $[[1, N]]^2$ et les événements sont équiprobables. Son cardinal est $|\Omega| = N^2$ $\overline{D}$ est caractérisé par le numéro double donc $\left|\overline{D}\right| = N$ et $|D| = N^2 - N$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(D) = \dfrac{N^2 - N}{N} = \dfrac{N-1}{N}}$

ii. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{array} \right.$

- Si $i < j$ alors $(Y_1 = i \cap Y_2 = j) = (A = i \cap B = j) \cup (A = j \cap B = i)$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_D(Y_1 = i, Y_2 = j) &= \frac{\mathrm{P}(Y_1 = i, Y_2 = j)}{\mathrm{P}(D)} \\ &= \frac{\frac{2}{N^2}}{\frac{N-1}{N}} = \frac{2}{N(N-1)} \end{aligned}$$

- Si $i < j$ alors $(Y_1 = i \cap Y_2 = j)$ est impossible et $\mathrm{P}_D(Y_1 = i, Y_2 = j) = 0$
- Si $i = j$ alors $(Y_1 = i \cap Y_2 = i)$ est incompatible avec D donc $\mathrm{P}_D(Y_1 = i, Y_2 = j) = 0$

c) Le programme permet de simuler Y_1 et Y_2 quand $A \neq B$.
Or, la loi du coule quen $A \neq B$ $(D$)est la même que celle du couple (X_1, X_2).
Donc le programme simule bien le couple (X_1, X_2).