Corrigé ESCP-EAP 2002 Maths III voie Eco par Pierre Veuillez

EXERCICE

On désigne par I, O, J et A les matrices carrées d'ordre 3 suivantes:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

1. a) On a $A=J-4I$ donc $J=A+4I$

   b) $J^2=3J$ donc $A^2=(J-4I)^2=J^2-8J+I=-5J+I$ (binôme car $I\,J=J=J\,I$) et $A^2+5A+4I=-5J+I+5\,(J-4I)+4I=0$

   c) On a donc en factorisant : $-\frac{1}{4}\left(A^2+5A\right)=I$ et $-\frac{1}{4}\left(A+5I\right)A=I$ et $A\left[-\frac{1}{4}\left(A+5I\right)\right]=I$ donc A est inversible et

$$\begin{aligned}A^{-1}&=-\frac{1}{4}\left(A+5I\right)\\&=-\frac{1}{4}\left(J+I\right)\end{aligned}$$

2. a) On a $J\,U=3U$ et $U\neq 0$ donc 3 est valeur propre de J.

   b) Soit $V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ On résout :

   $$J\,V=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+y+z=0\\x+y+z=0\\x+y+z=0\end{array}\right.\Longleftrightarrow x=-y-z$$

   Donc 0 est valeur propre et le sous espace propre associé est $\text{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right)$.

   Comme la famille $\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right)$ est de plus échelonnée, donc libre, elle forme une base de ce sous espace.

   c) Comme 0 est valeur propre de J, elle n'est pas inversible.

   Comme J est symétrique, elle est diagonalisable.

3. a) Si $J\,X=\lambda X$ alors $(A+4I)\,X=\lambda X$ et $A\,X=(\lambda-4)\,X$

   Donc $\mu=\lambda-4$ vérifie $AX=\mu X$.

   b) Comme J est diagonalisable, elle admet une base de vecteurs propres, qui sont donc également des vecteurs propres de A

   Donc A est diagonalisable avec pour matrice diagonale, les valeurs propres de J diminuées de 4.

   Or

   - le sous espace propre de J associé à la valeur propre 0 est de dimension 2
   - le sous espace propre de J associé à 3 est au moins de dimension 1
   - La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à 3. (car J est diagonalisable)

   Donc J n'a pas d'autres valeurs propres.

   Donc les valeurs propres de A sont -1 et -4.

   c) Comme $A\,X=\alpha X\Longleftrightarrow X=\alpha A^{-1}X\Longleftrightarrow A^{-1}X=\alpha^{-1}X$ alors les vecteurs propres de A sont les mêmes que ceux de A^{-1}.

   Donc A^{-1} admet aussi une base de vecteurs propres et ses valeurs propres sont les inverses de celles de A.

4. Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

a) On a $F_a(x,y) = -3x^2 + 2xy + 2xa - 3y^2 + 2ya - 3a^2$ donc F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme, produit et composée de fonctions de classe C^1 et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a(x,y)}{\partial x} &= -6x + 2y + 2a \\ \frac{\partial F_a(x,y)}{\partial y} &= 2x - 6y + 2a \end{aligned}$$

b) Donc les dérivée partielles d'ordre 1 sont simultanément nulle si et seulement si :
$\left\{ \begin{array}{l} -6x + 2y + 2a = 0 \\ 2x - 6y + 2a = 0 \quad L_2 + 3L_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -6x + 2y + 2a = 0 \\ -16x + 8a = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = a/2 \\ x = a/2 \end{array} \right.$
Donc$(x_0, y_0) = (a/2, a/2)$ est l'unique point critique et

$$\begin{aligned} F_a(x_0,y_0) &= -3\frac{a^2}{4} + 2\frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}a - 3\frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}a - 3a^2 \\ &= -2a^2 \end{aligned}$$

c) On a $(3x - y - a)^2 = 9x^2 - 6xy - 6xa + y^2 + 2ya + a^2$ donc

$$\begin{aligned} G_a(x,y) &= -3x^2 + 2xy + 2xa - 3y^2 + 2ya - 3a^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(9x^2 - 6xy - 6xa + y^2 + 2ya + a^2\right) + 2a^2 \\ &= -\frac{8}{3}y^2 + \frac{8}{3}ya - \frac{2}{3}a^2 = -\frac{2}{3}\left(4y^2 - 4ya + a^2\right) \\ &= -\frac{2}{3}(2y - a)^2 \end{aligned}$$

donc G_a est négative ou nulle.

d) Comme F_a n'a qu'un seul point critique, il n'y a qu'un seul extremum possible qui est (x_0, y_0) sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
De plus $G_a(x,y)$ est maximale (nulle) en $(a/2, a/2)$ et $-\frac{1}{3}(3x - y - a)^2$ également.
Donc $F_a(x,y) = G_a(x,y) - \frac{1}{3}(3x - y - a)^2$ est maximale en (x_0, y_0) où elle vaut $M(a) = -2a^2$.

e) $M(a)$ admet pour unique extremum $a = 0$

Problème

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie I : Exemples

1. Premiers exemples

   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

   a) On a alors $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2\cdot 3 = 6\,(n+1)$

   b) $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$. On a alors

   $$w_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} (2/3)^k = 3^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

   c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$. On a alors

   $$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} C_n^k 2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!}\,(2+3)^n = \frac{1}{n!} 5^n$$

2. Programmation

   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   On a besoin d'un S accumulateur pour les sommes. D'un compteur n pour les w et d'un compteur k pour la somme. Et d'une variable pour NF pour la valeur finale.

   On a $v_{n-k} = 1/\,(n-k+1)$

```
Var k,n,NF:integer; S:real;
begin
    writeln('n final?');readln(NF);
    for n:=0 to NF do
    begin
        S:=0;
        for k:=0 to n do S:=S+ln(k+1)/(n-k+1);
        writeln(n, ':  ',S);
    end;
end.
```

3. Un résultat de convergence

   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

a) On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} u_k &= \sum_{k=n+1}^{m} (1/2)^k = (1/2)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{m} (1/2)^{k-n-1} \text{ réindexé } h = k-n-1 \\
&= (1/2)^{n+1} \sum_{h=0}^{m-n-1} (1/2)^h = (1/2)^{n+1} \frac{(1/2)^{m-n} - 1}{(1/2) - 1} \\
&= (1/2)^n \left(1 - (1/2)^{m-n}\right) = (1/2)^n - (1/2)^m \\
&\leq (1/2)^n = u_n
\end{aligned}
$$

Donc pour $n < m$, on a bien : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Inégalités improuvable en un temps fini !

On sépare les termes de la somme w_{2n} :

$$
w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k\, v_{2n-k} = u_{2n} v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_{2n-k}
$$

Pour $k \leq n$ on a $2n - k \geq n$ et $v_{2n-k} \leq v_n$ (suite v décroissante)

Pour $k \leq 2n-1$ on a $v_{2n-k} \leq v_1$ donc en multipliant par $u_k \geq 0$

$$
w_{2n} \leq u_{2n} v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_n + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_1
$$

Et comme $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (1/2)^k = 2$ et que $\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k \leq u_n$ on a finalement en multipliant par $v_1 \geq 0$ et par $v_n \geq 0$:

$$
w_{2n} \leq u_{2n} v_0 + 2\, v_n + u_n\, v_1
$$

et de même pour

$$
\begin{aligned}
w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k\, v_{2n+1-k} &= u_{2n+1} v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\, v_{2n-k} \\
&\leq u_{2n+1} v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_1 \\
&\leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2 v_{n+1} + v_1\, u_n
\end{aligned}
$$

c) Comme w_{2n} est positive (somme de termes positifs) et majorée par $u_{2n} v_0 + 2\, v_n + u_n\, v_1$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors par encadrement w_{2n} tend vers 0.

De même pour w_{2n+1}

Donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (termes pairs et impairs)

d) Soit $w'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k\, v_{n-k}$. On a $|w'_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|u'_k\, v_{n-k}\right| = w_n$. Donc par encadrement, $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (i.e. $u' * v$) tend vers 0.

Partie II: Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})
$$

1. Si une suite a est décroissante alors pour tout entier $n > 0$: $a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$ donc $a_{n+1} \leq a_{n-1}$ et en additionnant ces deux inégalités on a $2a_{n+1} \leq a_n + a_{n-1}$ ou encore, $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$.

   Donc toute suite décroissante de réels positifs est élément de A.

   Si une suite a est strictement croissante alors $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$ et $2a_{n+1} > a_n + a_{n-1}$ et on n'a donc pas $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ pour tout entier $n > 0$. Donc une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   a) Une telle suite est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équation caractéristique est : $2r^2 - r - 1 = 0$ qui a pour racines 1 et $-1/2$
   Donc il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   b) On utilise la réciproque de la propriété ci-dessus :
   Soit la suite définie par $z_n = 1 + (-1/2)^n$. Elle est solution de $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$ et est positive ($(-1/2)^n \geq -1$ pour tout entier n)
   Donc elle est élément de A. Mais elle n'est pas monotone :
   $z_0 = 2 > z_1 = 1/2 < z_2 = 3/4$
   Donc il existe des (au moins une) suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.(c'est la suite u' du 3.)

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   a) Pour tout $n \geq 1$ on a : $c_n - c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} - \left(a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n-1}\right) - a_{n+1} \geq 0$ car $a \in A$
   Donc $c_{n+1} \leq c_n$ et la suite c est décroissante.
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 0$ alors $c_n \geq 0$ et la suite c est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel $\ell \geq 0$

   b) La démonstration de $\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$ ne se prête pas à la récurrence car n apparaît aussi à l'intérieur de la somme, et l'on n'a pas de relation simple entre c_{n+1-k} et c_{n-k}
   On a deux expressions pour $c_{n-k} = a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}$ si $k \leq n-1$ et $c_{n-n} = a_0$
   Il faudra donc découper la somme. Et pour cela, que $n \geq 1$
   Pour $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{0-k} = c_0 = a_0$

Et pour tout entier naturel $n > 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}\right) + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2}a_{n-k-1} + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} a_{n-k-1} + a_0 \quad \text{réindexé } h = k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{h=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^h a_{n-h} + a_0
\end{aligned}$$

$= a_n - a_0 + a_0 = a_n$

On a donc $b * c = a$

N.B. On ne peut pas utiliser ici le résultat du 3.c) pour dire que a converge alors vers 0 car on ne sait pas que la suite c converge vers 0.

c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b * \varepsilon$.
La suite ε est décroissante (car ℓ est une constante par rapport à n) et tend vers 0 ; et $b = u'$
Donc $d = b * \varepsilon$ converge vers 0.

d) On a

$$\begin{aligned}
d_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - \ell) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \ell \\
&= a_n - \ell\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = a_n - \frac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$a_n = d_n + \frac{2}{3}\ell\left(= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \to \frac{2}{3}\ell$$

quand $n \to +\infty$ car $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$

Partie III : Application aux variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Résultats préliminaires

   On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on désigne par S leur somme.

   a) Pour tout entier naturel n, on pose: $u_n = \mathbf{P}([X = n])$ et $v_n = \mathbf{P}([Y = n])$.
   On a

$$(S = n) = \bigcup_{k=0}^{n} (X = k \cap Y = n - k)$$

les bornes de la réunion venant de $n-k\geq 0$ (valeur de Y) et $k\geq 0$ (valeur de X)
La réunion étant disjointe, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(S=n\right) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\left(X=k\cap Y=n-k\right) \quad X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\left(X=k\right)\mathbf{P}\left(Y=n-k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}=w_n\end{aligned}$$

b) En prenant $X\hookrightarrow\mathcal{P}\left(2\right)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{P}\left(3\right)$ et X et Y indépendantes on a alors (somme de lois de Poisson)
on a alors $X+Y\hookrightarrow\mathcal{P}\left(2+3\right)$ donc $\mathbf{P}\left(S=n\right)=5^n/n!$ qui est bien la valeur trouvée au 1.c)

c) Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note 2^{-Z} la variable aléatoire prenant, pour tout entier naturel n, la valeur 2^{-n} si et seulement si l'événement $[Z=n]$ est réalisé.
2^{-Z} admet une espérance si la série $\sum_{n\geq 0}\mathbf{P}([Z=n])2^{-n}$ converge absolument.
Or $|\mathbf{P}([Z=n])2^{-n}|\leq 2^{-n}$ et comme la série $\sum_{n\geq 0}2^{-n}$ converge, alors par majoration de série à termes positifs, $\sum_{n\geq 0}\mathbf{P}([Z=n])2^{-n}$ converge absolument et donc

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}([Z=n])\left(\frac{1}{2}\right)^n=r\left(Z\right)$$

d) Les variables 2^{-X} et 2^{-Y} sont indépendantes donc l'espérance de leur produit est le produit de leurs espérances et donc

$$\begin{aligned}r\left(S\right) &= E\left(2^{-X-Y}\right)=E\left(2^{-X}2^{-Y}\right)\\ &= E\left(2^{-X}\right)E\left(2^{-Y}\right)\\ &= r(X)\,r(Y).\end{aligned}$$

e) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par : $\quad S_q=\sum_{i=1}^{q}X_i$.
On a

$$\begin{aligned}r(S_q) &= E\left(2^{-\sum_{i=1}^{q}X_i}\right)=E\left(\prod_{i=1}^{q}2^{-X_i}\right) \quad (X_i)_{i\geq 1} \text{ indépendantes}\\ &= \prod_{i=1}^{q}E\left(2^{-X_i}\right)=\left(E\left(2^{-X_1}\right)\right)^q \quad \text{car mêmes lois}\\ &= (r(X_1))^q\end{aligned}$$

2. Une formule sommatoire

a) Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Z=n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faut vérifier que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geq 0$ pour tout entier n et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ converge et vaut 1

Or $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ converge et vaut 1 et on a bien la loi d'une variable aléatoire.

$$\begin{aligned} r(Z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \text{on sait qu'elle converge} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) Pour prouver la probabilité de $S_q = n$, on peut procéder par récurrence sur n ou sur q.

Mais $(S_q = n+1)$ ne s'exprime pas simplement à partir de $S_q = n$. Donc on procède par récurrence sur q :

- Pour $q=1$ on a $S_1 = X_1$ et la loi de S_1 est celle de Z.
  Donc pour tout entier n :
  $$\mathbf{P}(S_1 = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = C_{n+1-1}^{1-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
- Soit $q \geq 1$ tel que la loi de S_q est :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S_q = n]) = C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$
  Alors $S_{q+1} = \sum_{k=1}^{q} X_k + X_{n+1} = S_q + X_{n+1}$
  Donc
  $$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{q+1} = n) &= \mathbf{P}\left[\bigcup_{k=0}^{n}(S_q = k \cap X_{n+1} = n-k)\right] \quad \text{disjoints} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_q = k)\,\mathbf{P}(X_{n+1} = n-k) \quad \text{indépendants.} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_{k+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+q}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{q+n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{k+q-1}^{q-1} \\ &= C_{n+q}^{q}\left(\frac{1}{2}\right)^{q+n+1} \end{aligned}$$
  d'après la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{k+q}^{q} = C_{n+q+1}^{q+1}$ en substituant $q-1$ à q.
- Donc pour tout entier naturel $q \geq 1$, la loi de S_q est bien celle donnée.

c) On sait que la série $\sum_{n\geq 0}\mathbf{P}(S=n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et que $r(S_q)$ est la somme de cette série.

$$\begin{aligned}
r(S_q) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(S=n)\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^q\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ existe et vaut $2^q r(S_q)$
Or $r(S_q)=(r(X_1))^q=(r(Z))^q$ car les X_i sont indépendants et on tous même loi que Z.
Enfin $r(Z)=\frac{2}{3}$ d'où finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n=2^q\left(\frac{2}{3}\right)^q=\left(\frac{4}{3}\right)^q$$

3. Un exemple concret

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie à la question 2.a) représente le nombre de petits devant naître en 2003 d'un couple de kangourous. Chaque petit kangourou a la même probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2003.

a) Quand $Z=n$, F est le nombre de femelles en n naissances indépendantes ayant toutes une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être femelles.
Donc $F/Z=n\hookrightarrow\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$ et

b) D'après la formule des probabilités totales, avec $(Z=k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'événements on a alors

$$\mathbf{P}(F=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_{Z=k}(F=n)\,\mathbf{P}(Z=k)$$

Or $\mathbf{P}_{Z=k}(F=n)=C_k^n\left(\frac{1}{2}\right)^k$ **si** $n\leq k$ (si $k\geq n$) et 0 sinon. On découpe donc la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M} &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}_{Z=k}(F=n)\,\mathbf{P}(Z=k)+\sum_{k=n}^{M}\mathbf{P}_{Z=k}(F=n)\,\mathbf{P}(Z=k)\\
&= 0+\sum_{k=n}^{M}C_k^n\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\quad\text{réindexé par } m=k-n\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{h=0}^{M-n}C_{m+n}^n\left(\frac{1}{4}\right)^{m+n}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n\sum_{h=0}^{M-n}C_{m+n}^n\left(\frac{1}{4}\right)^m
\end{aligned}$$

et avec $n = q - 1$ on retrouve quand M tend vers $+\infty$ la somme de la série précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(F = n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{m+q-1}^{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{m} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \left(\frac{4}{3}\right)^{q} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\frac{4}{3}\right)^{n} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}
\end{aligned}$$

c) Comme on reconnaît presque la loi géométrique (en décalant de 1) ...

Soit $F' = F + 1$, sa loi est donnée par $F'(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $p(F' = n) = p(F = n - 1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et on reconnaît une loi géométrique de paramètre $2/3$ donc $E(F') = 3/2$ et $F = F' + 1$ a une espérance et $E(F) = E(F' - 1) = E(F') - 1 = 1/2$

De même $Z' = Z + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$ donc $E(Z') = 2$ et $E(Z) = E(Z' - 1) = 1$

On a donc bien $\mathrm{E}(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.

Ou de façon plus élémentaire, on étudie la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ où on retombe sur la série géométrique dérivée.