Corrigé ESCP 2003 Eco par Pierre Veuillez

EXERCICE

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant:

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note:

- B_n l'événement "la n-ième boule tirée est blanche";
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**
   Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

N.B. cette suite n'est pas arithmético-géométrique car la "raison" additive dépend de n.

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha\, n + \beta$.
v appartient à $A \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$
$s\ (\alpha\ (n+1) + \beta) = (s-1)\ (\alpha\, n + \beta) + b + n \Longleftrightarrow n\,[\alpha - 1] + \beta - b + s\alpha = 0$
alors quand $n \to +\infty$, $a = 1$ sinon, la limite est infinie d'où $\beta = b - s$
Réciproquement, si $a = 1$ et $\beta = b - s$ l'égalité est vérifiée.
Conclusion : $\boxed{\text{La seule solution est } \alpha = 1 \text{ et } \beta = b - s \text{ pour que la suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ appartienne à } A.}$

b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$.
On a pour tout n non nul:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \frac{1}{s}\left((s-1)\ x_n + b + n - [(s-1)\, v_n + b + n]\right) \\ &= \frac{s-1}{s}\,(x_n - v_n) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{y \text{ est géométrique de raison } \dfrac{s-1}{s} \text{ et de premier terme } y_1 = x_1 - v_1 = x_1 - 1 - b + s}$

Donc pour tout entier n : $y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} y_1$ et

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + v_n \\ &= \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s) + n + b - s \end{aligned}$$

2. **Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**

a) Lors du premier tirage, il y a a boules noires et b boules blanches équiprobables.
Donc $\mathrm{P}(B_1) = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{s}$.
Et comme $(X_1 = 1) = B_1$ alors $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{s}$ et $u_1 = E(X_1) = \frac{b}{s}$.

b) (B_1, N_1) est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B_2) &= \mathrm{P}_{B_1}(B_2)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}_{N_1}(B_2)\,\mathrm{P}(N_1) \\ &= \frac{b}{s}\frac{b}{s} + \frac{b+1}{s}\frac{a}{s} \\ &= \frac{b^2 + (b+1)(s-b)}{s^2} \\ &= \frac{b^2 + (b+1)(s-b)}{s^2} \\ &= \frac{s - b + bs}{s^2} \\ &= \frac{1 - \frac{b}{s} + b}{s} = \frac{b + 1 - u_1}{s} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}}$

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$.
N.B. on se rend compte à la question suivante de l'importance de cette condition.
C'est elle qui permettra le tirage de k boules blanches et de $n-k$ boules noires si $k \in [[0, n]]$.
Pour tout entier k de l'intervalle $[0, n]$, quand $X_n = k$, en n tirages, on a obtenu k boules blanches et donc $n-k$ boules noires avec $n - k \leq a$.
Celles ci ont été remplacées par des blanches.
L'urne contient donc $a - n + k$ boules noires et $b + n - k$ boules blanches équiprobables.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{X=k}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}}$
Comme $X_n(\Omega) = [[0, n]]$ alors $(X_n = k)_{k \in [[0,n]]}$ est un système complet d'événements, donc

$$\mathrm{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_{X=k}(B_{n+1})\,\mathrm{P}(X_n = k)$$

dans lequel on fait apparaître $u_n = E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b+n-k}{s} \mathrm{P}(X_n = k) \\
&= \frac{1}{s}\left[\sum_{k=0}^{n} (b+n)\mathrm{P}(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k)\right] \\
&= \frac{1}{s}\left[b+n-E(X_n)\right]
\end{aligned}
$$

car $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_k) = 1$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}}$

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.

- Si $k \in [[0, n-a-1]]$ alors $k \leqslant n-a-1$ et $n-k \geqslant a+1$,
  l'événement $[X_n = k]$ est "obtenir $n-k$" boules noires.
  Ceci est impossible, car les boules noires ne sont pas remises.
  Donc $[X_n = k] = \emptyset$
- Si k est un entier de l'intervalle $[n-a, n]$, alors $n-a \leq k \leq n$ et $0 \leq n-k \leq a$.
  Donc si $X_n = k$, il y a là encore dans l'urne $b+n-k$ blanches et $a-n+k$ noires.
  D'où $\mathrm{P}_{X_n=k}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$

En n tirages, on obtient au maximum n boules blanches et a boules noires.

Donc au minimum, $n-a$ boules blanches.

Avec cette fois $X_n(\Omega) = [[n-a, n]]$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=n-k}^{n} \mathrm{P}_{X_n=k}(B_{n+1}) \mathrm{P}(X_n = k) \\
&= \frac{1}{s}\left[\sum_{k=0}^{n} (b+n)\mathrm{P}(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k)\right] \\
&= \frac{1}{s}\left[b+n-E(X_n)\right]
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}}$

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$**

a) Soit n un entier naturel non nul.

Comme le nombre de boule blanches obtenues augmente au plus de 1 à chaque tirage alors

$$
\begin{aligned}
(X_{n+1} = k) &= [X_{n+1} = k \cap X_n = k] \cup [X_{n+1} = k \cap X_n = k-1] \text{ incompatibles} \\
\mathrm{P}(X_{n+1} = k) &= \mathrm{P}_{X_n=k}(X_{n+1} = k)\mathrm{P}(X_n = k) + \mathrm{P}_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k)\mathrm{P}(X_n = k-1) \\
&= \mathrm{P}_{X_n=k}(N_{k+1})\mathrm{P}(X_n = k) + \mathrm{P}_{X_n=k-1}(B_{k+1})\mathrm{P}(X_n = k-1)
\end{aligned}
$$

Pour tout entier k de l'intervalle $[[n+1-a, n]]$, les événements $X_n = k$ et $X_n = k-1$ sont possibles et le conditionnement nous donne la composition de l'urne :

- quand $X_n = k$, on a obtenu $n-k$ boules noires ($0 \leqslant n-k \leqslant a-1$) et l'urne contient $a-n+k$ boules noires.

- quand $X_n = k-1$, on a obtenu $n-k+1$ boules noires ($1 \leqslant n-k+1 \leqslant a$) et l'urne contient $b+n-k+1$ blanches.

d'où :

$$\mathrm{P}\left(X_{n+1}=k\right)=\frac{a-n+k}{s}\mathrm{P}\left(X_n=k\right)+\frac{b+n-k+1}{s}\mathrm{P}\left(X_n=k-1\right)$$

- Pour $k=n+1$ la décomposition précédente reste valable avec l'événement $(X_n=k)$ impossible donc la probabilité conditionnelle n'est plus définie.
  Mais comme $\mathrm{P}\left(X_n=k\right)=0$, la formule précédente reste valable.
- Pour $k=n-a$ on a $n-(k-1)=a+1$ et l'événement $(X_n=k-1)$ qui est "obtenir $a+1$" boules noires est impossible.
  Mais là encore, $\mathrm{P}\left(X_n=k-1\right)=0$ et la formule reste valable.
- pour tout entier k de l'intervalle $[[1,n-a-1]]$ on a $k \leq n-a-1$ et $n+1-k \geq a+2$ donc $(X_{n+1}=k)$ impossible.
  On a également $n-k \geq a+1$ donc $(X_n=k)$ impossible et $n-(k-1) \geq 2$ donc $(X_n=k-1)$ impossible.
  L'égalité est encore vraie, tout étant nul.

Conclusion : $\boxed{\text{La formule est vraie pour tout } k \in [[0,n+1]]}$

b) En ajoutant éventuellement des termes nuls, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= E\left(X_{n+1}\right)=\sum_{k=0}^{n+1} k\mathrm{P}\left(X_{n+1}=k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k\left[\frac{a-n+k}{s}\mathrm{P}\left(X_n=k\right)+\frac{b+n-k+1}{s}\mathrm{P}\left(X_n=k-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[\sum_{k=0}^{n} k\left(a-n+k\right)\mathrm{P}\left(X_n=k\right)+0+\sum_{k=0}^{n}\left(k+1\right)\left(b+n-k\right)\mathrm{P}\left(X_n=k\right)+0\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[\begin{array}{l}\sum_{k=0}^{n} k^2\mathrm{P}\left(X_n=k\right)+(a-n)\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}\left(X_n=k\right)\\ -\sum_{k=0}^{n} k^2\mathrm{P}\left(X_n=k\right)+(b+n-1)\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}\left(X_n=k\right)\\ +(b+n)\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\left(X_n=k\right)\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[(a+b-1)\,u_n+b+n\right]
\end{aligned}$$

et avec $a+b=s$, on retrouve

Conclusion : $\boxed{s\ u_{n+1}=(s-1)\,u_n+b+n \text{ et } (u_n)_{n\geq 1}\in A}$

c) D'après la résolution faite on a alors

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(u_1-1-b+s\right)+n+b-s\\
&= \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{s}-1-b+s\right)+n+b-s
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(B_{n+1}\right) &= \frac{b+n-u_n}{s}\\
&= \frac{1}{s}\left[b+n-\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{s}-1-b+s\right)-n-b+s\right]\\
&= 1-\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{s}-1-b+s\right)
\end{aligned}$$

d) Comme $\left|\dfrac{s-1}{s}\right| < 1$ alors $\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1} \to 0$ et

Conclusion : $\boxed{u_n \to +\infty \text{ et } \mathrm{P}(B_n) \to 1 \text{ quand } n \to +\infty}$

PROBLÈME

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
À toute application f de $\mathcal{C}$, on associe l'application $D(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

*Les parties **A**, **B** et **C** sont indépendantes.*

Question préliminaire:

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \to f(x+1)$ est elle même continue sur $\mathbb{R}$.
Donc D est une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$.
Pour tout f et g de $\mathcal{C}$ et α et $\beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} D(\alpha f + \beta g)(x) &= (\alpha f + \beta g)(x+1) - (\alpha f + \beta g)(x) \\ &= \alpha(f(x+1) - f(x)) + \beta(g(x+1 - g(x))) \\ &= \alpha D(f)(x) + \beta D(g)(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{D \text{ est est un endomorphisme de } \mathcal{C}}$

Partie A : Image par D d'une fonction de répartition

1. Soit F une application continue sur $\mathbb{R}$

   Pour être fonction de répartition de variable à densité elle doit de plus vérifier

   - être de classe C^1 sauf en un nombre fini de points
   - être croissante sur $\mathbb{R}$
   - $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{-\infty} F = 1$

2. Soit F une application de $\mathcal{C}$ qui est une fonction de répartition et g l'application $D(F)$.

   a) Comme F est croissante et $x+1 \geqslant x$ alors $F(x+1) \geqslant F(x)$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout x réel;

   b) *Conclusion :* $\boxed{g \text{ est positive sur } \mathbb{R}}$

   c) Comme F est croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \leqslant t \leqslant x+1$ on a $F(x) \leqslant F(t) \leqslant F(x+1)$
   Et comme les bornes sont en ordre croissant, (inégalité de la moyenne ou intégration de l'inégalité) $F(x)(x+1-x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x+1} F(t)\ dt \leqslant F(x+1)(x+1-x)$.
   et $F(x) \leqslant \int_x^{x+1} F(t)\ dt \leqslant F(x+1)$
   Comme $\lim_{x\to-\infty} F(x+1) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, on a alors
   Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \int_x^{x+1} F(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} F(t)\,\mathrm{d}t = 1}$

d) Soit A et B deux réels vérifiant $A < 0 < B$ et $I(A,B)$ l'intégrale: $I(A,B) = \displaystyle\int_A^B g(t)\,\mathrm{d}t$.

Par changement de variable $t = x - 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_A^B g(t)\ dt &= \int_A^B F(t+1)\ dt - \int_A^B F(t)\ dt \\
&= \int_{A+1}^{B+1} F(x)\ dx - \int_A^B F(t)\ dt \\
&= \int_{A+1}^{A} F(t)\ dt + \int_B^{B+1} F(t)\ dt \\
&= \int_B^{B+1} F(t)\ dt - \int_A^{A+1} F(t)\ dt
\end{aligned}$$

e) g est positive, continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}} \int_A^B g(t)\ dt = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt = 1$

Conclusion : $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$

3. **Un exemple**

On suppose, dans cette question, que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et on pose: $g = D(F)$.

On a $F(x) = 0$ si $x \leqslant 0$; $F(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $F(x) = 1$ si $x \geqslant 1$.

Donc

- si $x \geqslant 1$ alors $x+1 \geqslant 1$et $F(x+1) - F(x) = 1 - 1 = 0$
- si $0 \leqslant x < 1$ alors dépend de $1 \leqslant x+1$ donc $F(x+1) - F(x) = 1 - x$
- si $-1 \leqslant x < 0$ alors $0 \leqslant x+1 < 1$ donc $F(x+1) - F(x) = x + 1$
- Enfin, si $x < -1$ alors $x+1 < 0$ et $F(x+1) - F(x) = 0$

Conclusion : $\boxed{g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}}$

Partie B : Recherche des valeurs propres de D

Si λ est un réel, on dit que λ est une *valeur propre* de D s'il existe une application f de $\mathcal{C}$, distincte de l'application nulle, vérifiant: $D(f) = \lambda f$.

1. Soit a un réel. On note g_a l'application de $\mathcal{C}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{ax}$.
On a $D(g_a)(x) = e^{a(x+1)} - e^{ax} = e^{ax}(e^a - 1) = (e^a - 1)\, g_a(x)$

Conclusion : $\boxed{D(g_a) = (e^a - 1)\, g_a \text{ et } e^a - 1 \text{ est valeur propre de } D}$

2. Pour $\lambda > -1$, on résout $e^a - 1 = \lambda \iff a = \ln(\lambda + 1)$ (car $\lambda + 1 > 0$) donc λ est valeur propre associée au vecteur propre $g_{\ln(\lambda+1)}$

Conclusion : $\boxed{\text{tout réel } \lambda \text{ strictement supérieur à } -1 \text{ est une valeur propre de } D.}$

3. Soit a un réel. On note h_a l'application de $\mathcal{C}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, h_a(x) = \sin(\pi x)\, e^{ax}$.
   On a $D(h_a)(x) = \sin(x+1)\, e^{a(x+1)} - \sin(x)\, e^{ax} = -(1+e^a)\sin(x)\, e^{ax}$

   Conclusion : $\boxed{D(h_a) = -(1+e^a)\, h_a \text{ et } -(1+e^a) \text{ est valeur propre}}$

4. et pour tout $\lambda < -1$, on a $-\lambda - 1 > 0$ et avec $a = \ln(-\lambda - 1)$ on a $-(1+e^a) = \lambda$ est valeur propre.

   Conclusion : $\boxed{\text{tout réel } \lambda \text{ strictement inférieur à } -1 \text{ est une valeur propre de } D}$

5. Si réel -1 est valeur propre de D alors il existe $f \neq 0$ telle que $f(x+1) - f(x) = 1f(x)$ pour tout x réel et donc $f(x+1) = 0$ et $f = 0$

   Absurde.

   Conclusion : $\boxed{-1 \text{ n'est pas valeur propre de } D}$

Partie C : Image par D d'une application polynomiale

Pour tout entier naturel p, on désigne par E_p le sous-espace de $\mathcal{C}$ dont les éléments sont les applications polynômiales de degré au plus p.
On note X l'application $x \mapsto x$ et, pour tout entier naturel non nul k, on note X^k l'application $x \mapsto x^k$.
Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications polynômiales définie par:

$$H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k)$$

1. On a

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{1!}\prod_{k=0}^{0}(X-k) = X \\
H_2 &= \frac{1}{2!}\prod_{k=0}^{1}(X-k) = \frac{X(X-1)}{2!} = \frac{-X}{2} + \frac{X^2}{2} \\
H_3 &= \frac{1}{3!}\prod_{k=0}^{2}(X-k) = \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} = \frac{X}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}
\end{aligned}$$

   On montre que la famille est libre : soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ réels alors
   si $\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma H_2 + \delta H_3 = 0$ on a pour tout x réel $(\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma H_2 + \delta H_3)(x) = 0$ et en particulier :

   - pour $x = 0 : \alpha = 0$
   - pour $x = 1 : \alpha + \beta = 0$
   - pour $x = 2 : \alpha + 2\beta + \gamma = 0$
   - pour $x = 3 : \alpha + 3\beta + 3\gamma + \delta = 0$

   d'où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et la famille est libre. (on a aussi une famille échelonnée)
   Elle comporte 4 vecteurs de E_3 (polynômes de degré $\leqslant 4$) et $\dim E_3 = 4$

   Conclusion : $\boxed{(H_0, H_1, H_2, H_3) \text{ est une base de } E_3}$

2. Soit $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E_3.

   a) On développe pour obtenir leurs coordonnées dans $\mathcal{B}_3$:

   - $H_0 = 1$ coordonnées : $(1, 0, 0, 0)$
   - $H_1 = X$ coordonnées $(0, 1, 0, 0)$
   - $H_2 = -\frac{X}{2} + \frac{X^2}{2}$ coordonnées $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$
   - $H_3 = \frac{X}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}$ coordonnées :$\left(0, \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}\right)$

   Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et on calcule l'inverse par résolution du système :

   $$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{c} x = a \\ y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}t = b \\ \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t = c \\ \frac{1}{6}t = d \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = a \\ y = \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}t + b = b + c + d \\ z = t + 2c = 6d + 2c \\ t = 6d \end{array} \right.$$

   Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

   b) Soit $a_0,\ a_1,\ a_2, : a_3$ des réels et Q l'application polynomiale $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$. Donc les coordonnées de Q dans $\mathcal{B}_3$ sont (a_0, a_1, a_2, a_3)

   Les coordonnées de Q dans $\mathcal{U}_3$ sont (en colonne) $P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ 2a_2 + 6a_3 \\ 6a_3 \end{pmatrix}$?

   En particulier pour X^3, ($a_3 = 0$ les autres nuls) ses coordonnées dans $\mathcal{U}_3$ sont $(0, 1, 6, 6)$ donc $X^3 = 0H_0 + 1H_1 + 6\,H_2 + 6\,H_3$.

3. **Application: moment d'ordre 3 d'une variable aléatoire de Poisson**

   Soit a un réel strictement positif et Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

   a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose: $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3\, a^k}{k!}$.

   On a :

   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3\, a^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{H_1(k) + 6\,H_2(k) + 6\,H_3(k)}{k!} a^k \end{aligned}$$

   avec

   $$\begin{aligned} \frac{H_1(k)}{k!} &= \frac{1}{1!}\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \text{ si } k \geq 1 \\ \frac{H_2(k)}{k!} &= \frac{1}{2!}\frac{k(k-1)}{k!} = \frac{1}{2}\frac{1}{(k-2)!} \text{ si } k \geq 2 \\ \frac{H_3(k)}{k!} &= \frac{1}{3!}\frac{k(k-1)(k-2)}{k!} = \frac{1}{6}\frac{1}{(k-3)!} \text{ si } k \geq 3 \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}a^k + 6\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\frac{1}{(k-2)!}a^k + 6\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{6}\frac{1}{(k-3)!}a^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}a^{k+1} + 3\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}a^{k+2} + \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!}a^{k+3} \text{ réindexé} \\
&\to ae^a + 3a^2e^a + a^3e^a \text{ quand } n \to +\infty
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général $\dfrac{n^3\,a^n}{n!}$ est convergente

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3\,a^n}{n!} = \left(a + 3a^2 + a^3\right) e^a}$

b) Z^3 a une espérance si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k^3\mathrm{P}(Z=k)$ est absolument convergente ($\Longleftrightarrow$ convergence simple car tout est positif)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k^3\mathrm{P}(Z=k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^3\frac{a^k e^{-a}}{k!} = e^{-a}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{k!}a^k \text{ qui converge} \\
&= a + 3a^2 + a^3
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(Z^3) = a + 3a^2 + a^3}$

4. Dans cette question, p est un entier naturel non nul fixé.

a) Si Q appartient à E_p, alors $D(Q) = Q(X+1) - Q$ est encore polynôme de degré $\leqslant p$ donc $D(Q)$ appartient aussi à E_p.
On note alors D_p l'endomorphisme de E_p qui, à tout Q de E_p, associe $D(Q)$.

b) Comme $\deg(H_k) = k$ alors la famille $\mathcal{U}_p = (H_0, H_1, \ldots, H_p)$ est formée de p vecteurs de E_p et est échelonnée donc libre.
Donc $\mathcal{U}_p$ est une base de E_p.

c) Déterminer $D_p(H_0) = 1\,(X+1) - 1 = 0$
$D_p(H_1) = X\,(X+1) - X = X + 1 - X = 1$
et pour tout entier i vérifiant $0 < i \leqslant p$, l'égalité :

$$\begin{aligned}
D_p(H_i) &= H_i(X+1) - H_i \\
&= \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X+1-k) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) \text{ réindexé } h = k-1 \\
&= \frac{1}{i!}\prod_{k=-1}^{i-2}(X-h) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) \text{ factorisé} \\
&= \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k)\left[X - 1 - (X-i+1)\right] \\
&= \frac{i}{i!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k) = \frac{1}{(i-1)!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k) \text{ car } i \geq 1 \\
&= H_{i-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{donc pour } i \geq 1 : D_p(H_i) = H_{i-1}}$

d) On a alors $M_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$ avec une sur diagonale de 1 et nulle ailleurs.

e) Comme M_p est triangulaire ses valeurs propres sont sur la diagonale.

Conclusion : $\boxed{\text{la seule valeur propre de } M_p \text{ est } 0}$

Si M_p était diagonalisable, on aurait :$M_p = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0$

Conclusion : $\boxed{M_p \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

5. **Application: moment d'ordre p d'une variable aléatoire de Poisson**
Soit p un entier naturel non nul fixé et $b_0, b_1, \ldots, b_p$ les réels vérifiant

$$X^p = b_0 H_0 + b_1 H_1 + \cdots + b_p H_p$$

Comme précédemment, on transforme la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k^p\, a^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b_0 H_0 + b_1 H_1 + \cdots + b_p H_p)\,(k)}{k!} a^k \\
&= \sum_{i=0}^{p} \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{b_i}{i!\,(k-i)!} a^k + 0 \right) \text{ réindexé } h = k - i \\
&= \sum_{i=0}^{p} \frac{b_i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{a^{h+i}}{(k-i)!} \\
&\to \sum_{i=0}^{p} \frac{b_i}{i!} a^i e^a \text{ quand } n \to +\infty
\end{aligned}$$

et celle de $E\left(Z^p\right)$: dont l'absolue convergence équivaut à la convergence simple puisque ses termes sont positifs.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^p \mathrm{P}\left(Z = k\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^p \frac{a^k e^{-a}}{k!} \\
&= e^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^p}{k!} a^k \\
&\to \sum_{i=0}^{p} \frac{b_i}{i!} a^i
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Z^p \text{ a une espérance et } E\left(Z^p\right) = \sum_{i=0}^{p} \frac{b_i}{i!} a^i}$

6. Dans cette question, p est un entier naturel non nul et, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, on considère l'application φ_i de E_p dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément Q de E_p, associe le réel :

$$\varphi_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$$

a) φ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient P et Q de E_p et α et β réels alors

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\alpha P+\beta Q) &= \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}(\alpha P+\beta Q)(k)\\
&= \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}(\alpha P(k)+\beta Q(k))\\
&= \alpha\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}P(k)+\beta\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}Q(k)\\
&= \alpha\varphi_i(P)+\beta\varphi_i(Q)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi_i\in\mathcal{L}(E_p,\mathbb{R})}$

b) Soit i et j deux entiers vérifiant $0\leqslant i\leqslant p$ et $0\leqslant j\leqslant p$;

On remarque que $H_j(k)=\frac{1}{j!}\prod_{h=0}^{j-1}(k-h)=0$ si $k\in[[0,j-1]]$ donc

$$\begin{aligned}
\varphi_i(H_i) &= \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_i(k)\\
&= \sum_{k=0}^{i-1}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_i(k)+(-1)^{i-i}\binom{i}{i}H_i(i)\\
&= H_i(i)=\frac{i!}{i!}=1\\
&= \frac{1}{i!}\prod_{h=0}^{i-1}(i-h)=\frac{i!}{i!}=1
\end{aligned}$$

Si $j>i$:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(H_j) &= \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_j(k)\\
&= 0 \text{ car } k<j \text{ dans la somme}
\end{aligned}$$

Si $j < i$

$$\begin{aligned}
\varphi_i(H_j) &= \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_j(k) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} 0 + \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!} \\
&= \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{k!}{j!(k-j)!} \\
&= \frac{i!}{j!} \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} \frac{1}{(i-k)!} \frac{1}{(k-j)!} \text{ complété en binôme} \\
&= \frac{i!}{j!(i-j)!} \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} \frac{(i-j)!}{(i-k)!(k-j)!} \text{ réindexé } h = k-j \\
&= \binom{i}{j} \sum_{k=0}^{i-j} (-1)^{i-j-h} \binom{i-j}{h} \\
&= \binom{i}{j} (1-1)^{i-j} = 0 \text{ car } i-j > 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi_i(H_i) = 1 \quad \text{et si} \quad j \neq i, \quad \varphi_i(H_j) = 0}$

c) On a $X^p = b_0 H_0 + b_1 H_1 + \cdots + b_p H_p$ et φ_i linéaire donc

$$\begin{aligned}
\varphi_i(X^p) &= \sum_{j=0}^{p} b_j \varphi_i(H_j) \\
&= \sum_{j=0:j\neq i}^{p} 0 + b_i \varphi_i(H_i) \text{ donc} \\
b_i &= \varphi_i(X^p) \\
&= \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} X^p(k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{on a donc bien } b_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p}$