EXERCICE

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ et par $\mathcal{B}$ sa base canonique : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$.
On pose $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_4, e_5, e_6)$, et on désigne respectivement par E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de E engendrés par $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Enfin, A est la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Soit u l'endomorphisme de E_1 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est A.
   Déterminer les valeurs propres de u ainsi qu'une base de vecteurs propres.

2. Soit f l'application linéaire de E_1 vers E_2 définie par : $f(e_1) = e_4, f(e_2) = e_5$ et $f(e_3) = e_6$.
   Montrer que f est un isomorphisme et déterminer la matrice de son isomorphisme réciproque f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.

3. a) Montrer que, si (x_1, x_2) est un élément de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = 0$, les vecteurs x_1 et x_2 sont nuls.
   b) En déduire que, si (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont deux éléments de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, alors on a : $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

4. Pour tout vecteur x de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$, on pose :
$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 + \lambda_3\, e_3 \\ x_2 = \lambda_4\, e_4 + \lambda_5\, e_5 + \lambda_6\, e_6 \end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$$
   a) Prouver que l'application F qui à tout vecteur x de E associe le vecteur $F(x)$, est un endomorphisme de E.
   b) Déterminer le noyau de F et en déduire que F est un automorphisme.
   c) Montrer que la matrice M de F dans la base $\mathcal{B}$ peut s'écrire sous la forme :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. On suppose, dans cette question, que μ est une valeur propre de F et que x est un vecteur propre associé à μ; on définit les vecteurs x_1 de E_1 et x_2 de E_2 comme dans la question précédente.
   a) Justifier que la valeur propre μ n'est pas nulle.
   b) Utiliser les résultats de la question 3 pour prouver que les vecteurs x_1 et x_2 sont tous les deux non nuls et que x_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\mu - \dfrac{1}{\mu}$.

6. Étudier la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{\times}$ par $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{x}$ et en donner une représentation graphique.

7. On suppose, dans cette question, que λ est une valeur propre de u et que x_1 est un vecteur propre de u associé à λ.

   a) Montrer que l'équation d'inconnue μ suivante : $\lambda = \mu - \dfrac{1}{\mu}$ admet deux solutions distinctes μ_1 et μ_2.

   b) Montrer que μ_1 et μ_2 sont des valeurs propres de F.
   Donner, en fonction de x_1, un vecteur propre de F associé à μ_1 et un vecteur propre de F associé à μ_2.

8. La matrice M est-elle diagonalisable ?

PROBLÈME

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$. Une urne contient 10 boules distinctes $B_1, B_2, \dots, B_{10}$. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise** , chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Partie I : Etude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \dots, B_r$

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \dots, B_r$ définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$.
   Y_1est le nombre de tirage pour tirer au moins une fois la boule B_1 dans une suite de tirages indépendants, la probabilité de l'obtenir étant $\frac{1}{10}$ (boules équiprobables) à chaque tirage.
   Donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$ et $E(Y_1) = 10$ et $V(Y_1) = 100 \times \frac{9}{10} = 90$

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

   a) Soit $A =$"les r boules $B_1, B_2, \dots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages".
   En notant B_i^j l'événement "tirer la boule i au $j^{ième}$ tirage", les tirages étant indépendants, $A = B_1^1 \cap B_2^2 \cap \dots \cap B_r^r$ et $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1^1)\,\mathrm{P}(B_2^2)\dots\mathrm{P}(B_r^r) = \left(\frac{1}{10}\right)^r$
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(A) = \left(\frac{1}{10}\right)^r}$

   b) $(Y_r = r)$ est "on a obtenus au moins ue fois les r boules en r tirages" donc "on a b*obtenu exactement une fois les r boules en r tirages"
   Comme il y a $r!$ ordres possibles (incompatibles) pour les tirages de ces r boules, on a donc
   Conclusion : $\boxed{\mathbf{P}([Y_r = r]) = \frac{r!}{10^r}}$

   c) IL faut au minimum r tirages pour obtenir au moins une fois chacue des r boules et il nb'y a pas de maximum.
   Donc les valeurs prises par Y_r sont :$Y_r(\Omega) = [[r, +\infty[[$

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$).
On pose : $X_1 = W_1$ et, pour tout i vérifiant $2 \leqslant i \leqslant r$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.
On admet que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$ sont indépendantes.

   a) Comme $W_r = Y_r$ on a donc
   $X_1 + X_2 + \cdots + X_r = W_1 + W_2 - W_1 + \cdots + W_r - W_{r-1} = W_r = Y_r$
   Conclusion : $\boxed{Y_r = \sum_{i=1}^{r} X_i}$

   b) X_i est le nombre de tirages nécessaire pour une boule non encore obtenue (parmi $1 \ldots r$)de plus, pour la $i$ème fois..
   Donc pour obtenir la $i^{ème}$ boule non encore obtenue.

   c) Comme X_i est le nombre de tirage pour obtenir la **première** boule non obtenue quand on en a déjà obtenu $i-1$, donc avec la probabilité $\frac{r-(i-1)}{10}$, les tirages étants **indépendants**, alors $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{r-i+1}{10}\right)$
   $E\left(X_i\right) = \frac{10}{r-i+1}$ et $V\left(X_i\right) = \left(\frac{10}{r-i+1}\right)^2 \left(1 - \frac{r-i+1}{10}\right) = \frac{10-r+i-1}{(r-i+1)^2} 10$

   d) On pose : $S_1(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k^2}$
   Cmme $Y_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$ alors $E\left(Y_r\right) = \sum_{i=1}^{r} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \frac{10}{r-i+1}$ réindexé par $j = r - i + 1$ (qui prend une unique fois les valeurs entières de 1 à r) $E\left(Y_r\right) = \sum_{j=1}^{r} \frac{10}{j} = 10\, S_1\left(r\right)$
   Et comme les (X_i) sont idépendantes,

$$\begin{aligned}
V\left(Y_r\right) &= \sum_{i=1}^{r} V\left(X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{10 - r + i - 1}{(r-i+1)^2} 10 \\
&= 10 \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{10}{(r-i+1)^2} - \frac{r-i+1}{(r-i+1)^2}\right) \\
&= 10 \left(10 \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j}\right) \text{ par } j = r - i + 1 \text{ décroissante} \\
&= 100\, S_2\left(r\right) - 10 S_1\left(r\right)
\end{aligned}$$

4. a) Comme $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ si $0 < k \leq t \leq k+1$ alors $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$
   Donc le minimum est $\frac{1}{k+1}$ et le maximum est $\frac{1}{k}$ sur $[k, k+1]$
   Donc comme $k \leq k+1$ on a $(k+1-k)\,\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \leq \int\limits_{k}^{k+1} \dfrac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

   b) En sommant l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k+1} \leq \sum \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{r+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}$$

et en réindexant la première, $i = k + 1$:

$$\sum_{i=2}^{r+1} \frac{1}{i} \leq \ln(r+1) \leq S_1(r)$$

et donc $S_1(r+1) = \sum_{i=2}^{r+1} \frac{1}{i} + 1 \leq \ln(r+1) + 1$ et en substituant r à $r+1$

$$\ln(r+1) \leq S_1(r) \leq \ln(r) + 1$$

On a donc

$$10\ln(r+1) \leqslant \mathbf{E}(Y_r) = 10S_1(r) \leqslant 10(\ln r + 1)$$

c) On a $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$ pour $t \in [k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$) donc comme précédement

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_1^{r+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$$

et en réindexant la première, $i = k + 1$:

$$\sum_{i=2}^{r+1} \frac{1}{i^2} \leq 1 - \frac{1}{r+1} \leq S_2(r)$$

et donc $S_2(r+1) = \sum_{i=2}^{r+1} \frac{1}{i^2} + 1 \leq 1 - \frac{1}{r+1} + 1$ et en substituant r à $r+1$

$$1 - \frac{1}{r+1} \leq S_2(r) \leq 2 - \frac{1}{r}$$

d) Comme $V(Y_r) = 100\, S_2(r) - 10S_1(r)$ on a donc

$$100\left(1 - \frac{1}{r+1}\right) - 10(\ln(r) + 1) \leq V(Y_r) \leq 100\left(2 - \frac{1}{r}\right) - 10\ln(r+1)$$

Partie II : Etude du nombre de boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; on note $\mathbf{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $[Z_n = k]$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

1. Etude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Z_1 est le nombre de boules (distinctes) parmi $B_1 \ldots B_r$ en 1 tirage.
La probabilité en étant $\frac{r}{10}$ on a donc $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{10}\right)$ (Bernouilli) et $E(Z_1) = \frac{r}{10}$

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2.
Z_2 est le nombre de boules distinctes en 2 tirages.
Ce n'est pas une hypergéométrique (remise) nin une binomiale (on compte les boules distinctes)
On revient à la définition :
$Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et on dénombre :

- Les tirages sont les paires de boules parmi 10 et sont équiprobables. Il y en a 10^2
- $(Z_2 = 0)$ est définit d'une paire de boule parmi $10 - r$. Il y en a $(10-r)^2$
  Donc $\mathrm{P}(Z_2 = 0) = \frac{(10-r)^2}{100}$
- $(Z_2 = 1) =$"deux fois la même boules" est caractérisé par
  i. la boule parmi les r et la boule parmi les autres $(10-r)$ et l'ordre de ces deux boules (2 choix)
  ii. ou deux fois la même boule parmi r
  Donc $\mathrm{P}(Z_2 = 1) = \frac{r(10-r)2}{100} + \frac{r}{100}$
- $(Z_2 = 2)$ est caractérisé par la liste sans répétition de deux boules parmi les r donc $\mathrm{P}(Z_2 = 2) = \frac{r(r-1)}{100}$

Donc $E(Z_2) = \sum_{i=0}^{2} \hat{\imath}\mathrm{P}(Z_2 = i) = \frac{(10-r)^2}{100} \times 0 + \left(\frac{r(10-r)2}{100} + \frac{r}{100}\right) \times 1 + \frac{r(r-1)}{100} \times 2$

et $\quad \mathbf{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :
$$10\,p_{n,k} = (10 - r + k)p_{n-1,k} + (r + 1 - k)p_{n-1,k-1} \tag{1}$$
On a $p_{n,k} = \mathrm{P}(Z_n = k)$

Comme lors du $n^{ième}$ tirage, on a au plus une boules parmis les r en plus de calles déjà btenues, alors au précédent ,on en avait déjà $k-1$ ou k
$$(Z_n = k) = [(Z_{n-1} = k-1) \cap (Z_n = k)] \cup [(Z_{n-1} = k) \cap (Z_n = k)]$$
les deux étant incompatibles car Z_{n-1} ne peut prendre qu'une valeur à la fois

Avec
$$\mathrm{P}_{(Z_{n-1}=k-1)}(Z_n = k) = \frac{r-k+1}{10}$$
car on doit tirer au $n^{ième}$ une des r boules non encore obtenues (il y en a encore $r - (k-1)$)

et
$$\mathrm{P}_{(Z_{n-1}=k)}(Z_n = k) = \frac{10-r}{10}$$
car on doit tirer au $n^{ième}$ une des $10 - r$ autres boules.

On a donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z_n = k) &= \mathrm{P}(Z_{n-1} = k-1)\,\mathrm{P}_{(Z_{n-1}=k-1)}(Z_n = k) + \mathrm{P}(Z_{n-1} = k)\,\mathrm{P}_{(Z_{n-1}=k)}(Z_n = k) \\ &= \frac{r-k+1}{10}\,p_{n-1,k-1} + \frac{10-r}{10}\,p_{n-1,k}\end{aligned}$$
d'où la relation (**??**)

3. Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r+1$.
   - on a alors $Z_n = k$ impossible donc, $\mathrm{P}(Z_n = k) = 0$ et $\mathrm{P}(Z_{n-1} = k) = 0$
   - si $k \geq r+2$ alors $Z_n = k-1$ impossible et $\mathrm{P}(Z_n = k-1) = 0$
   - si $k = r+1$ alors $\mathrm{P}(Z_n = k-1) = \mathrm{P}(Z_n = r) \neq 0$ mais $r - k + 1 = 0$

Donc dans tous les cas (1) devient $0 = 0$ qui est vraie.

Et l'égalité reste vraie pour $k \geq r+1$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par : pour tout réel x,

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} x^k, \quad \text{et on pose} \quad Q_0(x) = 1.$$

a) On a $Q_1(x) = \sum_{k=0}^{1} p_{1,k} x^k = p_{1,0} + p_{1,1} x$ avec $p_{1,1} = p(Z_1 = 1) = \frac{r}{10}$ et $p_{1,0} = \mathrm{P}(Z_1 = 0) = \frac{10-r}{10}$ donc $Q_1(x) = \frac{10-r}{10} + \frac{r}{10} x$
et $Q_2(x) = \frac{(10-r)^2}{100} + \left(\frac{r(10-r)2}{100} + \frac{r}{100}\right) x + \frac{r(r-1)}{100} x^2$

b) On a

$$\begin{aligned} Q_n(1) &= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(Z_n = k) \\ &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} (Z_n = k)\right) \\ &= \mathrm{P}(Z_n \leq n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Car en n tirages, on a au plus n boules distinctes de $1 \ldots r$ donc $Z \leq n$ (et $Z \leq r$)

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k\, p_{n,k} x^{k-1} \\ Q_n'(1) &= \sum_{k=0}^{n} k \mathrm{P}(Z_n = k) \\ &= \mathrm{E}(Z_n) \end{aligned}$$

Si $n \geq r$ les termes de $r+1$ à n sont nuls.

c) En utilisant l'égalité (**??**), établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul.

On a $Q'_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k} x^{k-1}$ et on va essayer de la faire apparaître :

$$\begin{aligned}
10\, Q_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left((10-r+k) p_{n-1,k} + (r+1-k) p_{n-1,k-1} \right) x^k \\
&\quad \text{et on isole les } k\, p_{n,k} \text{ qui sont des dérivées} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (10-r) p_{n-1,k} x^k + \sum_{k=0}^{n} k\, p_{n-1,k} x^k \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} r\, p_{n-1,k-1} x^k - \sum_{k=0}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1} x^k \\
&= (10-r) \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k} x^k + 0 \right] + x \left[\sum_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k} x^{k-1} + 0 \right] \\
&\quad \text{car } \ p_{n-1,n} = 0 \ \text{ et on réindexe } \ i = k-1 \\
&\quad + r \sum_{i=-1}^{n-1} p_{n-1,i} x^{i+1} - \sum_{i=-1}^{n-1} i\, p_{n-1,i} x^{i+1} \\
&= (10-r)\, Q_{n-1}(x) + x\, Q'_{n-1}(x) \\
&\quad + x\, r\, Q_{n-1}(x) - x^2 Q'_{n-1}(x) + 0 \\
&= (10-r+r\,x)\, Q_{n-1}(x) + x\,(1-x)\, Q'_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

d) Les deux membres sont dérivables par rapport à x et

$$\begin{aligned}
10 Q'_n(x) &= (10-r+r\,x)\, Q'_{n-1}(x) + r\, Q_{n-1}(x) \\
&\quad + x\,(1-x)\, Q''_{n-1}(x) + (1-2x)\, Q'_{n-1}(x) \\
&= r\, Q_{n-1}(x) + (11-r+(r\ -2)\,x)\, Q'_{n-1}(x) \\
&\quad + x\,(1-x)\, Q''_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

et pour $x = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
10 Q'_n(1) &= r\, Q_{n-1}(1) + (11-r+r-2)\, Q'_{n-1}(1) \\
&\quad + 1\,(1-1)\, Q''_{n-1}(x) \\
&= r + 9 Q'_{n-1}(1)
\end{aligned}$$

et donc

$$10 E(Z_n) = 9 E(Z_{n-1}) + r$$

Conclusion : $\boxed{E(Z_n) = \frac{9}{10} E(Z_{n-1}) + \frac{r}{10}}$

La suite $(E(Z_n))$ est donc arithmético-géométrique.

On détermerine c tel que $c = \frac{9}{10} c + \frac{r}{10} \iff c = r$

et la suite u définie par $u_n = E(Z_n) - c$ vérifie :

$u_{n+1} = E(Z_{n+1}) - c = \frac{9}{10} E(Z_n) + \frac{r}{10} - \left(\frac{9}{10} c + \frac{r}{10} \right) = \frac{9}{10} (E(Z_n) - c)$

est alors géométrique de raison $\frac{9}{10}$:

Donc $u_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n u_0$ avec $u_1 = E(Z_0) - r = 0 - r = -r$
d'où $u_n = -r\left(\frac{9}{10}\right)^n$
Conclusion : $\boxed{E(Z_n) = r(1 - 0,9^n)}$

5. a) Pour tout entier naturel n, le polynôme Q_n'' désigne la dérivée du polynôme Q_n'.
On repart de

$$10Q_n'(x) = r\,Q_{n-1}(x) + (11 - r + (r-2)\ x)\,Q_{n-1}'(x) + x(1-x)\,Q_{n-1}''(x)$$

et on redérive par rapport à x :

$$\begin{aligned} 10Q_n''(x) &= r\,Q_{n-1}'(x) \\ &\quad + (r-2)\,Q_{n-1}'(x) + (11 - r + (r-2)\ x)\,Q_{n-1}''(x) + \\ &\quad + (1-2x)\,Q_{n-1}''(x) + x(1-x)\,Q_{n-1}'''(x) \end{aligned}$$

et donc en $x = 1$

$$\begin{aligned} Q_n''(1) &= rQ_{n-1}'(1) \\ &\quad + (r-2)\,Q_{n-1}'(1) + (11 - r + r - 2\,)\,Q_{n-1}''(1) \\ &\quad + (1-2)\,Q_{n-1}''(1) + 0Q_{n-1}'''(x) \\ &= (2r-2)\,Q_{n-1}'(1) + 8Q_{n-1}''(1) \\ &= (2r-2)\,r(1-0,9^n) + 8Q_{n-1}''(1) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Q_n''(1) = 2r(r-1)(1-0,9^n) + 8Q_{n-1}''(1)}$
On prouve alors par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$Q_n''(1) = r(r-1)\left[1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$$

- Pour $n = 1$: $Q_1(x) = \sum_{k=0}^{1} p_k x^k$ et $Q_1''(x) = 0$
$r(r-1)\left[1 + \left(\frac{8}{10}\right)^1 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^1\right] = 0 = Q_1''(x)$
- soit $n \geq 1$ tel que $Q_n''(1) = r(r-1)\left[1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$
alors

$$\begin{aligned} 10Q_{n+1}''(1) &= 2r(r-1)\left(1 - 0,9^{n+1}\right) + 8Q_n''(1) \\ &= 2r(r-1)\left(1 - 0,9^{n+1}\right) + r(r-1)8\left[1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right] \\ &= r(r-1)\left[8 + 2 + 8\left(\frac{8}{10}\right)^n + (-2-16)\left(\frac{9}{10}\right)^n\right] \text{ donc} \\ Q_{n+1}''(1) &= r(r-1)\left[1 + \left(\frac{8}{10}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 1 : Q_n''(1) = r(r-1)\left[1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]}$

b) Comme $Q_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,p_{n,k} x^{k-1}$ alors $Q_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} k\ (k-1)\,p_{n,k} x^{k-2}$
Donc $Q_n''(1) = \sum_{k=0}^{n} k\ (k-1)\,p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k^{\,2} p_{n,k} - \sum_{k=0}^{n} k p_{n,k} = E(Z_n^2) - E(Z_n)$

D'où

$$\begin{aligned}
V\left(Z_n\right) &= E\left(Z_n^2\right)-E\left(Z_n\right)^2 \\
&= Q_n''\left(1\right)+Q_n'\left(1\right)-Q_n'\left(1\right)^2 \\
&= r(r-1)\left[1+\left(\frac{8}{10}\right)^n-2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]+r\left(1-0,9^n\right)-\left[r\left(1-0,9^n\right)\right]^2 \\
&\quad \text{reclasssé suivant les puissances} \\
&= r\left(r-1\right)\left(\frac{8}{10}\right)^n+r\left(\frac{9}{10}\right)^n-r^2\left(\frac{81}{100}\right)^n
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V\left(Z_n\right)=r\left(r-1\right)\,0,8^n+r\,0,9^n-r^2\,0,81^n}$