EXERCICE

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension n, avec $n \geqslant 2$. Si v est un endomorphisme de E, pour tout entier naturel k, on note v^k l'endomorphisme défini par récurrence par $v^0 = \mathrm{Id}$, où Id représente l'endomorphisme identité, et $v^{k+1} = v^k \circ v$.
Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A.

Dans cette partie, on suppose que l'entier n est égal à 2, et on considère un endomorphisme f vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Comme $f \neq 0$, il existe un vecteur x tel que $f(x) \neq 0$.
   Si $\alpha x + \beta f(x) = 0$ alors $f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) = 0$ d'où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$
   Donc la famille $(x, f(x))$ est libre de deux veteurs de E et comme $\dim(E) = 2$, c'est une base de E
2. Et comme $f(x) = 0x + 1f(x)$ et que $f(f(x)) = 0x + 0f(x)$ on a les coordonnées des images et donc
   Conclusion : $\boxed{\text{la matrice associée à } f \text{ dans, cette base est } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Partie B.

Dans cette partie, on suppose que $n = 4$ et on cherche à résoudre l'équation $u^2 = -\mathrm{Id}$, où u est un endomorphisme de E. Soit f une solution de cette équation.

1. f est solution de $f^2 = -\mathrm{Id}$.
   PAr l'absurde : Si il existe un réel λ tel que l'équation et un vecteur $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$ alors
   d'une part :$f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda^2 x$
   d'autre part $f(f(x)) = f^2(x) = -x$ et comme $x \neq 0$ alors $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ n'a donc pas de valeur propre (réelles).}}$
2. Soit x un vecteur non nul de E. Alors $f(x) \neq 0$ sinon, $f^2(x) = 0$ qui contredit $f^2(x) = -x$
   Soient α et β réels tels que (1) $\alpha x + \beta f(x) = 0$ alors $f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) + \beta f^2(x) = -\beta x + \alpha f(x) = 0$ (2)
   Donc $\beta(1) + \alpha(2)$ donne $\left(\beta^2 + \alpha^2\right) f(x) = 0$ et comme $f(x) \neq 0$ alors $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ d'où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$
   Conclusion : $\boxed{\text{la famille } (x, f(x)) \text{ est libre.}}$
   On note F le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.
   La famille est libre et génératrice de F. C'est donc une base de F et
   Conclusion : $\boxed{\dim(F) = 2}$
3. a) D'après le théorème de la base incomplète, comme la famille $(x, f(x))$ est libre et qu'il existe une base$\mathcal{B}$ (génératrice) de 4 vecteurs alors il existe une base $(x, f(x), z_1, z_2)$ où z_1 et z_2 sont éléments de $\mathcal{B}$
   Conclusion : $\boxed{\text{il existe une base de } E \text{ de la forme } (x, f(x), z_1, z_2)}$

b) Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (z_1, z_2) ;
soit y un vecteur non nul de G.
Si $(1) : \alpha x + \beta f(x) + \gamma y + \delta f(y) = 0$ alors (image par f)
$(2) : -\beta x + \alpha f(x) - \delta y + \gamma f(y) = 0$
Donc $\alpha(1) - \beta(2)$ donne $\left(\alpha^2 + \beta^2\right) x + \left(\delta^2 + \gamma^2\right) y$ et comme y est combinaison linéaire de (z_1, z_2) il s'écrit $y = az_1 + be_2$ et donc

$$\left(\alpha^2 + \beta^2\right) x + \left(\delta^2 + \gamma^2\right)(az_1 + bz_2) = 0$$

et la famille (x, z_1, z_2) étant libre, $\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = 0$ donc $\alpha = 0$ et $\beta = 0$;
ainsi que $\left(\delta^2 + \gamma^2\right) a$ et $\left(\delta^2 + \gamma^2\right) b = 0$
Comme $y \neq 0$ alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ donc $\delta^2 + \gamma^2 = 0$ et $\alpha = \beta = 0$
Conclusion : $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), y, f(y)) \text{ est libre.}}$

4. Et l'on a alors $f(x) = 0x + 1f(x) + 0y + 0f(y)$ et de même avec $f(f(x)) = -x$, $f(y)$ et $f(f(y)) = -y$

   Donc dans une telle base la matrice associée à f s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie C.

On suppose dans cette partie, que E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.
On définit sur E l'application f qui, à tout polynôme P de E, associé $f(P)$ défini par

$$f(P)(X) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

où P' et P'' sont respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Méthode expresse :
   Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $P' = b + 2cX + 3dX^2$ et $P'' = 2c + 6dX$
   Alors

$$\begin{aligned} f(P) &= \left(1 + X^2\right)(2c + 6dX) - 2X\left(b + 2cX + 3dX^2\right) \\ &= 2c + X(6d - 2b) + X^2(2c - 4c) + X^3(6d - 6d) \\ &= 2c + X(-2b + 6d) - 2cX^2 \in \mathbb{R}_3[X] \end{aligned}$$

   Donc, avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

$$\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(f(P)) = \begin{pmatrix} 2c \\ -2b + 6d \\ -2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

   donc f est l'application linéaire associée à cette matrice dans la $\mathcal{B}$ et elle est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

2. a) $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) La matrice de f étant triangulaire, les valeurs propres de f sont donc $\{0, -2\}$.
On note E_0 et E_{-2} les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres 0 et -2.

c) $f(P) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ -2b + 6d = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ b = 3d \end{array} \right.$ donc $E_0 = \{a + 3dX + dX^2 \ / \ a, d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(1\ ,\ 3X + X^2\right)$
famille génératrice de E_0 et libre (2vecteurs non proportionnels) donc $(1\ ,\ 3X + X^2)$ est une base de E_0

$$\begin{aligned} f(P) &= -2P \Longleftrightarrow 2c + 2a + 6dX + 2dX^3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = a \\ d = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $E_{-2} = \text{Vect}\left(1 + X^2\ ,\ X\right)$ qui est libre
Conclusion : $\boxed{(1 + X^2\ ,\ X) \text{ base de } E_{-2}}$

d) La somme des dimensions des sous espaces propres étant 4, f est diagonalisable

3. On veut résoudre dans cette question, l'équation $u^2 = f$ dans laquelle l'inconnue u désigne un endomorphisme de E. Soit g une solution de cette équation.

a) g est solution deonc $g^2 = f$ est dans la base $(1\ ,\ 3X + X^2\ ,\ 1 + X^2\ ,\ X)$ (base de vecteurs propre de f) sa matrice est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) On a $f \circ g = f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$ donc f et g commutent

c) On s'intéresse à la restriction de g à E_0.
Soit $x \in E_0$ alors $f(x) = 0$ donc $g(f(x)) = 0 = f(g(x))$ et donc $g(x) \in E_0$
Donc g est une application de E_0 dans E_0 et elle est linéaire
Conclusion : $\boxed{g_0 \text{ est un endomorphisme de } E_0}$
Et de même pour $x \in E_{-2}$ on a $f(x) = -2x$ et $f(g(x)) = g(f(x)) = g(-2x) = -2g(x)$ donc $f(g(x)) = -2g(x)$ et $g(x) \in E_{-2}$
Conclusion : $\boxed{g_{-2} \text{ est un endomrophisme de } E_{-2}}$

4. Soit x de E_0 on a $f(x) = 0$ donc $g_0^2(x) = 0$
Don, ou bien g_0 est nulle et sa matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou bien sa matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base $(x, f(x))$ de E_0 où $f(x) \neq 0$
Soit $y \in E_{-2}$ alors $f(x) = -2x$ et donc $g^2(x) = -2x$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}g\right)^2(x) = -x$
Donc la matrice de $\frac{1}{\sqrt{2}}g$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(y, f(y))$ de E_{-2}
Donc la matrice de g dans $(x, f(x), y, f(y))$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

PROBLÈME

Partie I

Dans cette partie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$, $v_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$, $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

1. a) Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \\ &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \text{ car } a \searrow \end{aligned}$$

N.B. quand on substitue $n+1$ à n dans $2n$ on obtient $2(n+1) = 2n+2$!
N.B. $2n+2$ est pair donc $(-1)^{2n+2} = 1$
et de même

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)+1}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k \\ &= (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \\ &= -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0 \text{ car } a \searrow \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } u \text{ est décroissante, et la suite } v \text{ est croissante.}}$

b) Pour tout entier n : $u_n - v_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n}$

On a donc $v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$ pour tout entier n.

Donc la suite u est décroissante et minorée par **la constante** v_0 donc convergente et de même pour v qui est croissante et majorée.

Reste à montrer qu'elles ont la même limite : on a vu que $u_n - v_n = a_{2n+1} \to 0$ donc, les deux suites ont la même limite.

($u \searrow$ et $v \nearrow$ et $u_n - v_n \to 0$: les deux suites sont adjacentes donc convergent toutes deux, et vers la même limite)

Conclusion : $\boxed{u \text{ et } v \text{ convergent vers la même limite } s}$

c) Comme les termes pairs et impairs de s_n tendent vers s, alors s_n converge elle même vers s.

2. Comme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k. \to s$ quand $n \to +\infty$, alors par définition,

Conclusion : $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n a_n, \text{ est convergente et sa somme vaut } s}$

3. C'est un cas particulier de ce quiprécède :
$\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0

Conclusion : $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{(-1)^k}{k+1} \text{est convergente}}$. On note $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

4. a) C'est une somme presque usuelle pour $n-1 \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t} \text{ car } -t \neq 1 \\ &= \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\end{aligned}$$

b) On intègre l'égalité précédentesur $[0,1]$ où ces fonctions sont continues

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k dt &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \text{ donc} \\ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 t^k dt &= [\ln(1+t)]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \text{ et} \\ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\right]_0^1 &= \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^\times : \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt}$

c) On détermine la limite de $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$ par encadrement du contenu :

$\forall t \in [0,1] : \frac{1}{1+t} \leq 1$ et $t \geq 0$ donc $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$.

les bornes étant en ordre croissante : $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$

et par encadrement, $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

De plus $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \to 0$ et finalement, $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \to \ln(2)$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} .= \ln(2)}$

Partie II

Deux amis, Pierre et Paul jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel n ; chaque sollicitation constitue une manche de ce jeu et :

- si cet entier n est impair, Paul donne n Euros à Pierre : on considère que Pierre gagne et que son gain est égal à + n ;
- si cet entier n est pair, Pierre donne n Euros à Paul : on considère que Pierre perd et que son gain est égal à - n ;

– si n= 0, on considère que Pierre perd, et que son gain est égal à 0.
On considère un espace probabilisé $(\Omega; A; P)$ qui modélise le jeu.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre obtenu lors d'une sollicitation.

1. On suppose, jusqu'à la fin de la question 5, que la loi de probabilité de X est définie par

$$P(X=0)=0, \quad \text{et pour tout } n>1 : P(X=n)=\frac{\alpha}{n(n+1)}$$

où α est un réel strictement positif.

a) On a : $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1-n}{n\,(n+1)}=\dfrac{1}{n\,(n+1)}$

Conclusion : $\boxed{a=1 \text{ et } b=-1 \text{ conviennent.}}$

b) On doit avoir $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}\,(X=n)=1$
on calcule la somme partielle

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}\,(X=n) &= 0+\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha}{n\,(n+1)}\\ &= \alpha\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\\ &= \alpha\left(1-\frac{1}{N+1}\right) \text{ t lescopiques}\\ &\to \alpha\end{aligned}$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}\,(X=n)=\alpha$
Conclusion : $\boxed{\alpha=1}$

2. a) L'événement $A=$"Pierre gagne une manche quelconque" est "X prend une valeur impaire" : $\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2k+1)$ réunion d'incompatibles.
Donc $\mathrm{P}\,(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}\,(X=2k+1)$ dont on calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{N}\mathrm{P}\,(X=2k+1)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

que l'on ne sait pas calculer .... si l'on ne s'acharne pas à appliquer les formules démontrées dans la partie I.
On fait apparaitre des puissances de -1 qui alternent ±1 suivant la parité.
Or $2k+1$ est impair et $2k+2$ lui est pair !
On a : $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{(-1)^{2k}}{2k+1}+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2}$ d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}\mathrm{P}\,(X=2k+1) &= \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^{2k}}{2k+1}+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2}\\ &= \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^{2k}}{2k+1}+\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2}\\ &= \sum_{k=0:k \text{ impair}}^{2N+1}\frac{(-1)^{k}}{k+1}+\sum_{k=0:k \text{ pair}}^{2N+1}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\end{aligned}$$

les bornes étant choisies pour être les mêmes pour les deux sommes.

$$\sum_{k=0}^{N} \mathrm{P}(X = 2k+1) = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$
$$\to \ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = 2k+1)$$

quand $N \to +\infty$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pierre gagne avec une probabilité de } \ln(2)}$

b) Pour calculer l'espérance, il faut déterminer le gain en fonction de la valeur de X :
Quand $X = n$ et n pair le gain est de n et de $-n$ si n est impair.
L'alternance ± 1 est obtenue avec $(-1)^n$
Et on a un gain de $n(-1)^n$ quand $X = n$ (y compris pour $n = 0$)
Donc le gain a une espérance si $\sum_{n\geq 0} n(-1)^n \mathrm{P}(X = n)$ est absolument convergente.
N.B. ici, celà n'équivaut pas à la convergence simple.

$$|n(-1)^n \mathrm{P}(X = n)| = n\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

Or $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+1/n} \sim \frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. Et la série à termes positifs $\frac{1}{n}$ est divergente ! (Rieman)
Donc par comparaison de termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} n(-1)^n \mathrm{P}(X = n)$ est absolument divergente et

Conclusion : $\boxed{\text{le gain n'a pas d'espérance !}}$

3. Pierre et Paul effectuent deux manches consécutives. On suppose que les résultats de ces deux manches sont indépendants. On note Y le gain cumulé de Pierre à l'issue de ces deux manches.

- Si Pierre gagne les deux manches, ses deux gains impairs et positifs et le total pair, positif strictement.
- S'il gagne l'une (gain impair) et perd l'autre (gain pair) , son gain total sera impair
- S'il perds les deux, ses deux gains seront pairs et le total pair et négatif ou nul.

Donc

- $(Y = 0)$ n'est possible que s'il perd deux fois avec 0
  Donc $(Y = 0) = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$ en notant X_1 et X_2 les résultats de chacune des deux manches.
  Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y = 0) = 0}$
- $(Y = 2)$ n'est possible que s'il gagne deux fois.
  La somme des deux gains positifs valant 2 on a donc $(Y = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$ indépendants
  et $\mathrm{P}(Y = 2) = \frac{1}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{4}$
  Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y = 2) = \frac{1}{4}}$
- $(Y = -2)$ n'est paossible que s'il perd deux fois : une fois de 0 et une fois de 2.
  Donc $(Y = -2) = [(X_1 = 0) \cap (X_2 = 2)] \cup [(X_1 = 2) \cap (X_2 = 0)]$ incompatibles
  $\mathrm{P}(Y = -2) = \mathrm{P}[(X_1 = 0) \cap (X_2 = 2)] + \mathrm{P}[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 0)] = 0$
  Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y = -2) = 0}$

4. a) La fonction $x \to \dfrac{\ln(x)}{1 - x^2}$ est continue sur $]0;1[$

– En 0 : $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2} \to -\infty$ donc l'intégrale est impropre en 0.
$\dfrac{\ln(x)}{1-x^2} \sim \ln(x) \leq 0$ quand $x \to 0$ (car $1-x^2 \to 1$) et $\int_0^1 \ln(x)\, dx$ converge donc, par comparaison de fonctions négatives, l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1-x^2} dx$ converge également en 0.
– En 1 : on pose $h = x - 1 \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x)}{1-x^2} &= \frac{\ln(1+h)}{1-(1+h)^2} = \frac{\ln(1+h)}{-2h-h^2} \\ &= \frac{\ln(1+h)}{-h(2+h)} \to -\frac{1}{2} \text{ car } \ln(1+h) \sim h \end{aligned}$$

donc la fonction est prolongeable par continuité en 1 et la fonctionest continue par morceaux sur $]0;1]$.

Conclusion : $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx \text{ est convergente}}$

b) Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. On part de

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} x^{2k} \ln(x) &= \ln(x) \sum_{k=0}^{n} \left(x^2\right)^k \\ &= \ln(x) \left[\frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}\right] \text{ car } x^2 \neq 1 \\ &= \frac{\ln(x)}{1-x^2} - \frac{x^{2n+2}\ln(x)}{1-x^{\,2}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{\ln(x)}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln(x) + \frac{x^{2n+2}\ln(x)}{1-x^{\,2}}}$

c) Comme on doit calculer la valeur de cette intégrale imppropre en 0, on ne chercher pas à appliquer de critère de convergence.
On intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon > 0$:
$u(x) = \ln(x)$: $u'(x) = \frac{1}{x}$: $v'(x) = x^{2k}$: $v(x) = \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$ (car $2k+1 > 0$) u et v de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$.

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 x^{2k} \ln(x)\, dx &= \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ln(x)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\frac{1}{x} dx \\ &= 0 - \frac{\varepsilon^{2k+1}}{k+1}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{2k+1}\int_\varepsilon^1 x^{2k} dx \\ &= -\frac{\varepsilon^{2k+1}\ln(\varepsilon)}{k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2}\left(1-\varepsilon^{2k+1}\right) \\ &\to \frac{-1}{(2k+1)^2} \text{ quand } \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

car $\ln(\varepsilon) = o\left(\varepsilon^{-2k-1}\right)$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : \displaystyle\int_0^1 x^{2k} \ln(x)\, dx \text{ converge et vaut } \frac{-1}{(2k+1)^2}.}$

d) En 0 on a $\ln(x) = o(x^{-2})$ donc $x^2 \ln(x) = \ln(x)/x^{-2} \to 0$

En 1 on pose $h = x - 1 \to 0$ et $\dfrac{x^2 \ln(x)}{1-x^2} = (h+1)^2 \dfrac{\ln(h+1)}{-h(2+h)} \to \dfrac{-1}{2}$

Donc $x \to \dfrac{x^2 \ln(x)}{1-x^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1

Soit $\tilde{F}$ son prolongement. Elle est continue sur un segment donc elle est bornée sur $[0,1]$ et donc également sur $]0,1[$.

Conclusion : $\boxed{x \to \dfrac{x^2 \ln(x)}{1-x^2} \text{ est bornée sur }]0,1[}$

Soit M un minorant de $\dfrac{x^2 \ln(x)}{1-x^2}$ sur $]0,1[$: $M \leq \dfrac{x^2 \ln(x)}{1-x^2} \leq 0$

On encadre alors pour obtenir la limite, en partant du contenu.

$$\begin{aligned} \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^2} &= x^{2n} \frac{x^2 \ln(x)}{1-x^2} \text{ donc} \\ M\, x^{2n} &\leq \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^2} \leq 0 \end{aligned}$$

et comme $0 \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 M\, x^{2n} dx &\leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^2} dx \leq 0 \text{ et} \\ \frac{M}{2n+1} &\leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^2} dx \leq 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{M}{2n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$ donc

Conclusion : $\boxed{\text{Par encadrement } \lim_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^2} dx = 0.}$

e) On repart de $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k} \ln(x) + \dfrac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^{\,2}}$ dont les intégrales sur $[0,1]$ convergent toutes donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^{2k} \ln(x) dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^{\,2}} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^{\,2}} dx \end{aligned}$$

Et comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^{\,2}} dx \to 0$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{(2k+1)^2} \to \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx$ quand $n \to +\infty$.

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}}$

On admet que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Onne veut que la somme des termes impairs. On sépart :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1:k \text{ pair}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1:k \text{ impair}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ qui convergent toutes deux} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8}}$

5. a) On réduit au même dénominateur pour pouveoir comparer et on réordonne par puissance de n :

$$\begin{aligned}\frac{a}{n} + \frac{b}{(n+1)^2} + \frac{c}{n+2} &= \frac{a(n+2)(n+1)^2 + b\,n(n+2) + c\,n(n+1)^2}{n(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{a(n^3+4n^2+5n+2) + b\,(n^2+2n) + c\,(n^3+2n^2+n)}{n(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{n^3(a+c) + n^2(4a+b+2c) + n(5a+2b+c) + 2a}{n(n+1)^2(n+2)}\end{aligned}$$

On aura l'égalité demandée si (condition suffisante, l'équivalence n'est pas demandée)

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 5a+2b+c = 0 \\ 4a+b+2c = 0 \\ a+c = 0 \end{cases} \text{ et par substitution :}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1/2 \\ 5/2 - 2 - 1/2 = 0 \\ b = -2c - 4a = -1 \\ c = -1/2 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{n(n+1)^2(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1/2}{n+2}}$ avec $a = 1/2 : b = -1 : c = -1/2$

b) $(Y = 1)$ est réalisé s'il gagne (impair) un de plus qu'il ne perd (pair) :

$(Y=1)=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left[(X_1=2n\cap X_2=2n+1)\cup(X_1=2n+1\cap X_2=2n)\right]$ incompatibles

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1) &= 0+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X_1=2n\cap X_2=2n+1)\\
&\quad +0+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X_1=2n+1\cap X_2=2n)\\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X_1=2n)\,\mathrm{P}(X_2=2n+1)\\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)^2(2n+2)} \text{ d compos}\\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1/2}{2n}-\frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1/2}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

On revient à la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}\\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{1^2}\\
&\to \frac{5}{4}-\frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y=1)=\frac{5}{2}-\frac{\pi^2}{4}}$

6. On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $(\lambda>0)$.
   On a donc $\mathrm{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
   a) Avec $A=$"Pierre gagne une manche." on a $A=\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2k+1)$
   et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=2k+1)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

Astuce : Pour éliminer les termes pairs dans $e^{\lambda}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$, il suffit d'y insérer des $(-1)^k$:

$e^{-\lambda}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!}$ et donc $e^{\lambda}-e^{-\lambda}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-(-1)^k\right)\frac{\lambda^k}{k!}$ avec $\left(1-(-1)^k\right)=0$ si k pair et 2 si k impair, il nous reste

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda}-e^{-\lambda}\right)$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda}-e^{-\lambda}\right)e^{-\lambda}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda}\right)}$

b) La probabilité qu'il perde est $1 - \mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right) > \mathrm{P}(A)$

Conclusion : $\boxed{\text{il a plus de chaces de perdre que de gagner}}$

c) On étudie la convergence absolue de $\sum_{k\geq 0} (-1)^k k\mathrm{P}(X = k)$: (théoréme de transfert)

$\left|(-1)^k k\mathrm{P}(X = k)\right| = \lambda^k \dfrac{e^{-k}k}{k!}$ avec $k! = k(k-1)!$ pour $k \geq 1$ on retrouve en réindexant une série exponentielle qui converge.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc, l'espérance de gain existe}}$

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} k\mathrm{P}(X = k) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \text{ r index } h = k-1 \\
&= e^{-\lambda} \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^{h+2} \frac{\lambda^{h+1}}{h!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^h}{h!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{l'espérance de gain est de } \lambda e^{-2\lambda}}$

(**ESCP 2005)**