Prépa ECE 2
DS n°3+ / Durée 4h / Le 26/11/2010
ESCP 2005

EXERCICE

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension n, avec $n \geqslant 2$. Si v est un endomorphisme de E, pour tout entier naturel k, on note v^k l'endomorphisme défini par récurrence par $v^0 = \text{Id}$, où Id représente l'endomorphisme identité, et $v^{k+1} = v^k \circ v$.
Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A.

Dans cette partie, on suppose que l'entier n est égal à 2, et on considère un endomorphisme f vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $(x, f(x))$ soit une base de E.
2. En déduire que la matrice associée à f dans, cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie B.

Dans cette partie, on suppose que $n = 4$ et on cherche à résoudre l'équation $u^2 = -\text{Id}$, où u est un endomorphisme de E. Soit f une solution de cette équation.

1. Montrer qu'il n'existe pas de scalaire λ tel que l'équation $f(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$, admette une solution non nulle.
2. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre.
   On note F le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Quelle est la dimension de F ?
3. a) Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(x, f(x), z_1, z_2)$.
   b) Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (z_1, z_2) ; soit y un vecteur non nul de G. Montrer que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
4. Montrer que dans une base bien choisie, la matrice associée à f s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie C.

On suppose dans cette partie, que E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.
On définit sur E l'application f qui, à tout polynôme P de E, associé $f(P)$ défini par

$$f(P)(X) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

où P' et P'' sont respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. a) Écrire la matrice associée à f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E.
   b) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{0, -2\}$.
   On note E_0 et E_{-2} les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres 0 et -2.
   c) Déterminer une base de E_0 et une base de E_{-2}.
   d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. On veut résoudre dans cette question, l'équation $u^2 = f$ dans laquelle l'inconnue u désigne un endomorphisme de E. Soit g une solution de cette équation.

   a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à g^2 s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

   b) Montrer que f et g commutent, c'est-à-dire que pour tout x de E, on a $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.

   c) On s'intéresse à la restriction de g à E_0. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E_0 qu'on notera g_0.
   Montrer de même que la restriction de g à E_{-2} définit un endomorphisme de E_{-2} qu'on notera g_{-2}.

4. En utilisant les résultats des parties précédentes, donner la forme d'une matrice associée à g.

PROBLÈME

Partie I

Dans cette partie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite s, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite s.

   c) En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.

2. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$, est convergente.

3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$est convergente. On note $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

4. a) Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n\frac{t^n}{1+t}$.

   b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^\times$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$

   c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$.

Partie II

Deux amis, Pierre et Paul jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel n ; chaque sollicitation constitue une manche de ce jeu et :

– si cet entier n est impair, Paul donne n Euros à Pierre : on considère que Pierre gagne et que son gain est égal à + n ;
– si cet entier n est pair, Pierre donne n Euros à Paul : on considère que Pierre perd et que son gain est égal à - n ;
– si n= 0, on considère que Pierre perd, et que son gain est égal à 0.

On considère un espace probabilisé $(\Omega; A; P)$ qui modélise le jeu.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre obtenu lors d'une sollicitation.

1. On suppose, jusqu'à la fin de la question 5, que la loi de probabilité de X est définie par

$$P(X=0)=0, \quad \text{et pour tout } n>1 : P(X=n)=\frac{\alpha}{n(n+1)}$$

où α est un réel strictement positif.

   a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.

   b) En déduire la valeur de α.

2. a) Calculer la probabilité que Pierre gagne une manche quelconque.

   b) Calculer l'espérance du gain de Pierre pour une manche.

3. Pierre et Paul effectuent deux manches consécutives. On suppose que les résultats de ces deux manches sont indépendants. On note Y le gain cumulé de Pierre à l'issue de ces deux manches.
Calculer $P(Y=0)$, $P(Y=2)$ et $P(Y=-2)$.

4. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx$ est convergente.

   b) Établir, pour tout réel x de $]0;1[$ et pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, l'égalité :

$$\frac{\ln(x)}{1-x^2}=\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln(x)+\frac{x^{2n+2}\ln(x)}{1-x^{2}}$$

   c) Montrer que pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{2k}\ln(x)dx$ converge.

   Exprimer en fonction de k la valeur de cette intégrale.

   d) Montrer que la fonction $x\mapsto \dfrac{x^2\ln(x)}{1-x^2}$, définie sur $]0;1[$, est prolongeable par continuité en 0 et en 1. En déduire qu'elle est bornée sur $[0;1]$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}\ln(x)}{1-x^2}dx$.

   e) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

   On admet que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx$.

5. a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, on ait l'égalité suivante :

$$\frac{1}{n(n+1)^2(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{(n+1)^2}+\frac{c}{n+2}$$

   b) Calculer $P(Y=1)$.

6. On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $(\lambda>0)$.

   a) Calculer, en fonction de λ, la probabilité que Pierre gagne une manche.

   b) Comparer la probabilité que Pierre gagne une manche à celle qu'il perde une manche.

   c) Calculer l'espérance du gain de Pierre pour une manche.