ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

Corrigé ESC 2000Eco par Pierre Veuillez

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

   On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

   (a) f est dérivable en x tel que $x^2+x+1 \neq 0$ Or ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 1-4 < 0$. Donc il est toujours strictment positive. Donc f est définie, continue, et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $$f'(x) = \frac{\left(x^2+x+1\right) - (2x+1)\,x}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

   $$f(x) = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \underset{x\to\infty}{\to} 0$$

   (b) En 0, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ La tangente a donc pour équation $y = x$.

   (c) les positions relatives de C et T sont données par le signe de $f(x) - x$:

   $$f(x) - x = \frac{x}{x^2+x+1} - x = \frac{x - x\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1} = \frac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$$

   Elles s'interceptent en 0 et en -1

x	-∞		-1		0		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	2^0 degré
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	1/3	$\searrow$	0
$-x^2$		$-$		$-$	0	$-$		$-$	2^0 degré
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	affine
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

   $$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2+u_n+1}$$

   (a) $p \in \mathbb{N}^*$

   $$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} = \frac{p}{1+p+p^2}$$

   donc

   $$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p+1} &= \frac{p}{1+p+p^2} - \frac{1}{p+1} \\ &= \frac{p(p+1) - \left(1+p+p^2\right)}{(1+p+p^2)(p+1)} \\ &= \frac{-1}{(1+p+p^2)(p+1)} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p}{1+p+p^2} \leq \frac{1}{p+1}}$

(b) Pour $n=0, 0<u_0=1\leq \dfrac{1}{0+1}$.

Soit n tel que $0<u_n\leq \dfrac{1}{n+1}$. Est-ce que $0<u_{n+1}\leq \dfrac{1}{n+2}$?

Comme f est strictement croissante sur $[0,1]$ et que 0, u_n et $\frac{1}{n+1}$ en sont éléments, $f(0)<f(u_n)\leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et comme $f\left(\frac{1}{n+1}\right)\leq \frac{1}{n+2}$ car $n+1\geq 1$ on a bien $0<u_{n+1}\leq \dfrac{1}{n+2}$.

Donc pour tout entier n, $0<u_n\leq \dfrac{1}{n+1}$

(c) Comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

3. (a) D'après les variations de f, pour $x\neq 0$, $f(x)\neq 0$. Et

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$$

Donc comme pour tout entier n, $u_n\neq 0$

$$\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{f(u_n)}=u_n+1+\frac{1}{u_n}$$

(b) Pour $n=1$, on a

$$\frac{1}{u_1}=u_0+1+\frac{1}{u_0}=1+1+\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}$$

Soit $n\geq 1$ tel que $\dfrac{1}{u_n}\leq n+1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Est-ce que $\dfrac{1}{u_{n+1}}\leq n+2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$?

Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}} &= u_n+1+\frac{1}{u_n}\text{avec } u_n\leq\frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{1}{u_n}\leq n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ donc}\\ \frac{1}{u_{n+1}} &\leq \frac{1}{n+1}+1+n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=n+2+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\text{ CQFD}\end{aligned}$$

Donc par récurrence, pour tout entier $n\geq 1$,

$$\frac{1}{u_n}\leq n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

4. (a) On minore le contenu :

Pour tout x de $[k-1,k]$ on a $k-1\leq x\leq k$ donc $\frac{1}{x}\geq\frac{1}{k}$ d'où (bornes croissantes) $\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\geq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}dx=\frac{1}{k}$

On fait alors la somme de ces inégalités pour k de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx=\ln(n)\ \text{(Chasles)}$$

On reporte dans l'inégalité sur $1/u_n$

$$\frac{1}{u_n}\leq n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=n+1+\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq n+2+\ln(n)$$

(b) On a donc

$$u_n \geq \frac{1}{n+2+\ln(n)} \text{ et } n \cdot u_n \geq \frac{n}{n+2+\ln(n)}$$

d'où l'encadrement:

$$\underbrace{\frac{1}{1+2/n+\ln(n)/n}}_{\to 1} = \frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq n \cdot u_n \leq \frac{n}{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1+1/n}}_{\to 1}$$

la deuxième inégalité venant du début: $0 < u_n < 1/(n+1)$

Donc,par encadrement, $n \cdot u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

(ESC 2000)

Exercice 2

Partie A

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble E des matrices M de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$M = xA + yA^2 + zA^3 \text{ avec } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

1. (a) Calculer A^2 et A^3 .
   (b) Etablir que A, A^2 et A^3 sont linéairement indépendantes.
   (c) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.
2. (a) Calculer les valeurs propres de A .
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie B

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par : $g(e_1) = e_2, g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) = u$.

1. (a) Ecrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire que : $g(u) = e_1 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} ac & = & 1 \\ a + bc & = & 0 \\ b + c^2 & = & 0 \end{array} \right.$.
2. On résout par substitution :: $\left\{ \begin{array}{ccc} ac & = & 1 \\ a + bc & = & 0 \\ b + c^2 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b = -c^2 \\ a = c^3 \\ c^4 = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b = -c^2 \\ a = c^3 \\ c = \pm 1 \end{array} \right.$

   Les solutions sont donc $(a, b, c) = (1, -1, 1)$ et $(a, b, c) = (-1, 1, -1)$

   (et avec la première, on retrouve comme matrice A ...)

   Déterminer par leur matrice dans la base B, quand ils existent, les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$g(e_1) = e_2, g(e_2) = e_3, g(e_3) = u \text{ et } g(u) = e_1$$

Exercice 3

On dispose d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire ainsi que d'une pièce non truquée.
On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante :

- on jette une fois la pièce
- si l'on obtient pile, on tire avec remise une boule de l'urne

- si l'on obtient face, on tire sans remise une boule de l'urne.

1. On répète deux fois $\mathcal{E}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
   (a) Donner les valeurs de X.
   (b) Définir l'événement $(X = 2)$, en déduire $P[X = 2] = \frac{1}{8}$ et donner $P[X = 0]$.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X.

2. On répète $\mathcal{E}$ et on s'arrête dès que l'urne est vide ou dès que l'on a effectué $\mathcal{E}$ trois fois.
   Soient Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de $\mathcal{E}$ effectuées et Z la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
   (a) Calculer $P[Y = 2]$. En déduire la loi de Y .
   (b) Montrer que $P[Y = 3 \cap Z = 1] = \frac{11}{32}$. Déterminer la loi du couple (Y, Z).
   (c) Calculer la covariance de ce couple.

3. On répète $\mathcal{E}$ jusqu'à ce que l'on obtienne la première boule blanche.
   Soit T la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de E ainsi effectuées.
   (a) Quel est l'ensemble des valeurs de T ?
   (b) Calculer $P[T = 1]$ et $P[T = 2]$.
   (c) Soit n un entier. Calculer pour $n \geq 3$ la probabilité de l'événement E_{n-2} : "les n - 2 premières réalisations de $\mathcal{E}$ donnent chacune pile et une boule noire".
   En déduire que pour $n \geq 2$, $P[T = n] = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
   (d) Calculer l'espérance de T .