$\boxed{\text{ESC 2001}}$

EXERCICE 1 : Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et séries
Corrigé DM 6

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 2xe^x$

1. f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x) = 2(x+1)e^x > 0$.

f est donc continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc bijective de $[0,1]$ dans $f[0,1] = [f(0), f(1)] = [0, 2e]$

On a donc

x	0 $\quad$ 1
$f(x)$	0 $\nearrow$ 2e

et par symétrie,

x	0 $\quad$ 2e
$f^{-1}(x)$	0 $\nearrow$ 1

2. Sur l'intervalle $[0,1]$ pour que f soit définie. : "$\alpha e^\alpha = 1$" $\Leftrightarrow$ "$f(\alpha) = 2$" et comme f est bijective de $[0,1]$ dans $[0,2e]$ et que $2 \in [0,2e]$, l'équation a une unique solution sur $[0,1]$. Et comme $f(0) = 0$, 0 n'est pas solution et $\alpha \neq 0$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

3. Pour tout entier n, u_{n+1} existe si u_n existe et $u_n \in [0,2e]$: Il faut d'abord prouver que u_n existe avant de prouver que $u_n \in]0,1]$.

Pour $n = 0$, $u_0 = \alpha \in]0,1]$ car $\alpha \neq 0$

Soit n un entier tel que u_n existe et $u_n \in]0,1]$.

Alors $f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$ existe et $f^{-1}(u_n) \in]0,1]$ car pour tout x de $]0,2e]$: $f^{-1}(x) \in]0,1]$ donc $u_{n+1} \in]0,1]$

Donc pour tout entier n, u_n existe et $u_n \in]0,1]$

4. **a)** On étudie les variation de $g(x) = f(x) - x$.
g est dérivable sur $[0,1]$ et $g'(x) = 2(x+1)e^x - 1$
g' est dérivable sur $[0,1]$ et $g"(x) = 2(x+2)e^x > 0$.
Donc g' est strictement croissante et comme $g'(0) = 0$, $g'(x) > 0$ sur $[0,1]$
Donc g est strictement croissante sur $[0,1]$ et comme $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ sur $]0,1]$ et $f(x) - x > 0$ avec $f(0) = 0$.

b) Attention, ici $u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \Leftrightarrow u_n = f(u_{n+1})$
Comme pour tout entier n : $u_n \in]0,1]$ et $f(u_{n+1}) - u_{n+1} > 0$ donc $u_n - u_{n+1} > 0$ et $u_n > 0$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

c) u est décroissant eet minorée par 0. Elle est donc convergente. et comme pour tout entier n : $u_n \in [0,1]$, par passage à la limite, $\ell \in [0,1]$
Comme f^{-1} est continue sur $[0,2e]$ (réciproque d'une focntion continue et strictement croissante) elle est continue en ℓ.
Donc $f(\ell) = \ell$. La seule solution sur $[0,1]$ étant 0 on a donc $\ell = 0$.
Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

5. On se propose de préciser ce résultat en déterminant un équivalent de u_n

On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

a) On a pour tout entier n, $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ donc $u_n = f(u_{n+1}) = 2u_{n+1}e^{u_{n+1}}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n\, e^{-u_{n+1}}$

b) Pour $n = 0$, est-ce que $u_0 = \dfrac{e^{-S_0}}{2^0}$?

Or $S_0 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = \alpha$ et comme $\alpha e^{\alpha} = 1$, $\dfrac{e^{-S_0}}{2^0} = e^{-\alpha} = \alpha = u_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$, est-ce que $u_{n+1} = \dfrac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}}$?

Or $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ et

$$\frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-S_n - u_{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-S_n}}{2^n}\frac{e^{-u_{n+1}}}{2} = u_n\frac{e^{-u_{n+1}}}{2} = u_{n+1}$$

Donc pour tout entier n, $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$

c) Comme pour tout entier n : $u_n \geq 0$ on a alors $S_n \geq 0$ donc $-S_n \leq 0$ et comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$: $e^{-S_n} \leq e^0$.

Donc $u_n \leq \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente et par comparaison de séries à termes positifs la série de terme général u_n est convergente. On note L sa somme.

On a pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $\sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{N} u_n \geq u_0 = \alpha$ et

$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-1/2} = 2$ donc par passage à la limite dans les inégalités $\alpha \leq L \leq 2$.

d) On calcule le quotient :

$$\frac{u_n}{\frac{e^{-L}}{2^n}} = \frac{e^{-S_n}}{2^n}\frac{2^n}{e^{-L}} = e^{-S_n+L} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

d'où finalement $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-L}}{2^n}$

(ESC 2001)

EXERCICE 2 : matrices et changement de variable

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi que les matrices colonne:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que V_1, V_2, et V_3 sont des vecteurs propres de A. A quelles valeurs propres sont-ils associés ?

2. **a)** Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

b) Justifier la relation $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

On note D cette matrice diagonale.

c) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$et vérifier qu'elle est diagonale.

3. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations:

$$X_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in N \quad , \; X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \; .$$

A cet effet, on définit pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

c) Montrer alors que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+2} & = & u_{n+1} \\ v_{n+2} & = & 4v_n \\ w_{n+2} & = & -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

En déduire les expressions explicites de u_n , v_n , et w_n en fonction de n.

d) Donner finalement la matrice X_n , en fonction de n .

(ESC 2001)

EXERCICE 3

1. On pose pour tout entier naturel n non nul l'intégrale: $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^n}\,dt$

a) On peut intègrer par parties : $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1/t$ ce qui conduira à une relation entre I et i ou plus rapidement :

$$\int_1^A \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_{t=1}^A = \frac{1}{2}\ln(A)^2 - 0 \to +\infty$$

quand $A \to +\infty$ donc l'intégrale I_1 est divergente.

b) Soit $u_n(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^n}$ on a $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \frac{-1}{(n-1)\,t^{n-1}}$ avec u et v C^1

$$\begin{aligned}
&\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^n}\,dt \\
&= -\frac{\ln A}{(n-1)\,A^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int_1^A \frac{1}{t^n}dt \\
&= -\frac{\ln A}{(n-1)\,A^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\left[\frac{-1}{(n-1)\,t^{n-1}}\right]_1^A \\
&= \frac{\ln A}{(n-1)\,A^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2\,A^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2}
\end{aligned}$$

et comme $A^{n-1} \gg \ln(A)$ quand $A \to +\infty$ on a donc $\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^n}\,dt \to \frac{1}{(n-1)^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^n}\,dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{(n-1)^2}$

c) f est dérivable sur $[2;+\infty[$ et

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{\frac{1}{t}t^2 - \ln(t)\,2t}{t^4} \\
&= \frac{1 - 2\ln[t]}{t^3}
\end{aligned}$$

Comme $t \to 1 - 2\ln[t]$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est nulle en $\sqrt{e}$ elle est strictement négative sur $]\sqrt{e},+\infty[$ donc sur $[2,+\infty[$

En $+\infty$ on a $\ln(t) \ll t^2$ donc $f(t) \to 0$ et

t	2	$+\infty$
$1-2\ln(t)$	$-$	
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$\searrow$	0

d) Comme $t \to \ln(t)/t^2$, est positive et décroissante et que I_2 est convergente, alors par comparaison entre série et intégrale impropress la série $\sum_{k\geq 2} \frac{ln(k)}{k^2}$ converge.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} g(t) = 0 \text{ si } t < 1 \\ g(t) = \dfrac{4ln(t)}{t^3} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$

a) g est connitnue sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues.
En 1^- on a: pour $x < 1$: $g(x) = 0 \to 0$ et $g(1) = 4\ln(1)/1^3 = 0$ donc g est continue en 1 et donc sur $\mathbb{R}$.
De plus $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$
Reste enfin à étuddier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$:
$\displaystyle\int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt = 0$
$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{4ln(t)}{t^3}dt = 4\int_{1}^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^3}dt = 4I_3 = \frac{4}{2^2} = 1$ (intégrale convergente d'après la question précédente)
Donc g est bien une densité de probabilité.

<u>On nomme dans toute la suite X une variable aléatoire admettant la densité g.</u>

b) X a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,dt$ converge :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{1} tg(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt = 0$
$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tg(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{4t\ln(t)}{t^3}dt = 4\int_{1}^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^2}dt = 4I_2 = \frac{4}{1^2} = 4$ (intégrale convergente)
Donc X a une espérance et $E(X) = 4$

c) X a une espérance si X^2 a une espérance : si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)\,dt$ converge; Or
$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^2 g(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{4t^2\ln(t)}{t^3}dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{4\ln(t)}{t}dt$ or I_1 est divergente donc X^2 n'a pas d'espérance et X $n'a$ pas de variance.

3. Etude d'une variable discrète définie à partir de X.

a) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} G(t) = 0 \text{ si } t < 1 \\ G(t) = 1 - \frac{2ln(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$
G est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$.
G est dérivable en 1 si elle a une dérivée a droite et à gauche et que ces dérivées sont égales.
Elle est dérivable en 1^+ comme quotient de fonctions continues et pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2\frac{\frac{1}{t}t^2 - \ln(t)\,2t}{t^4} - -\frac{2}{t^3} \\ &= 4\frac{\ln t}{t^3} \\ G'\left(1^+\right) &= 0 \end{aligned}$$

En 1^- on peut revenir au taux d'acroissement :
pour $h < 0$: $\frac{G(0+h)-G(0)}{h} = \frac{0-0}{h} \to 0$ donc G est dérivable à gauche de 1 et $G'(1^-) = 0$

ou on peut utiliser le théorème de prolongement :

pour $x < 1$: $G(x) = 0 \to 0 = G(1)$ donc G est continue en 1 et $G'(x) = 0 \to 0$. Donc G est dérivable à gauche en 1 et $G'(1^-) = 0$

D'une façon au d'une autre g est donc dérivable également en 1.

Finalement G est dérivable sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et $G'(t) = g(t)$ pour $t > 1$ et $t < 1$

Donc G est la fonction de répartition d'une varaibale aléatoire de densité g donc de X.

On note Z la variable aléatoire discrète définie par:

$$Z(\Omega) = N \quad \text{et} \qquad Z = [X] \quad \text{partie entière de} \quad X$$

On rappelle que si $x \in \mathbb{R}^+ \, et \; k \in N$, $[x] = k \Leftrightarrow k \leq x < k+1$.

b) On a $(Z = k) = ([X] = k) = (k \leq X < k+1)$ et comme $k \leq k+1$ on a alors :

$$P(Z = k) = p(k \leq X < k+1) = G(k+1) - G(k).$$

c) Preuve par récurrence :

- Pour $n = 0$: $\sum\limits_{k=0}^{0} kP(Z = k) = 0$ et

$$-(0{+}1)\left[1 - G(0{+}1)\right] + \sum_{k=0}^{0}(1 - G(k+1)) = -\left[1 - G(1)\right] + (1 - G(0{+}1)) = 0$$

  donc l'égalité est vérifiée.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} kP(Z = k) \; = \; -(n+1)\left[1 - G(n+1)\right] + \sum_{k=0}^{n}(1 - G(k+1))$$

  alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} kP(Z = k) &= \sum_{k=0}^{n} kP(Z = k) \; + (n+1)\,P(Z = n+1) \\
&= \; -(n+1)\left[1 - G(n+1)\right] + \sum_{k=0}^{n}(1 - G(k+1)) \\
&\qquad + (n+1)\left[G(n+2) - G(n+1)\right] \\
&= -(n+1) + \sum_{k=0}^{n}(1 - G(k+1)) + (n+1)\,G(n+2)
\end{aligned}$$

et par l'autre membre :

$$
\begin{aligned}
-(n+2)\left[1-G(n+2)\right]+\sum_{k=0}^{n+1}\left(1-G(k+1)\right) &= -(n+2)\left[1-G(n+2)\right] \\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\left(1-G(k+1)\right)+\left(1-G(n+2)\right) \\
&= -(n+1)+(n+1)\,G(n+2) \\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\left(1-G(k+1)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} kP(Z=k)
\end{aligned}
$$

- Et par récurence, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(Z=k) \;=\; -(n+1)\left[1-G(n+1)\right]+\sum_{k=0}^{n}\left(1-G(k+1)\right)$$

d) On a

$$
\begin{aligned}
1-G(t) &= 1-\left(1-\frac{2ln(t)}{t^2}\;-\frac{1}{t^2}\right) \\
&= \frac{2ln(t)}{t^2}\;+\frac{1}{t^2}=\frac{2\ln(t)}{t^2}\left(1+\frac{1}{2\ln(t)}\right) \\
&\sim \frac{2\ln(t)}{t^2}
\end{aligned}
$$

car $1+\frac{1}{2\ln(t)}\to 1$ quand $t\to+\infty$ donc $(1-G(k))$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{2lnk}{k^2}$

e) Dans la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} kP(Z=k)$ on a :

- par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum_{k\geq 2}\dfrac{2lnk}{k^2}$ converge alors la série $\sum_{k\geq 2}(1-G(k))$ converge et donc également (en réindexant) la série $\sum_{k\geq 0}(1-G(k+1))$.
- de plus $-(n+1)\left[1-G(n+1)\right]\sim-(n+1)\frac{2\ln(n+1)}{(n+1)^2}=-\frac{2\ln(n+1)}{n+1}\to 0$ car $\ln(x)=o(x)$ et
- donc $\sum_{k=0}^{n} kP(Z=k)$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$ et Z a une espérance.

(ESC 2001)