

# ESC 2001

## EXERCICE 1 : Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et séries

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = 2xe^x$

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0; 1]$  sur un ensemble que l'on déterminera.

On note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$ . Donner les tableaux des variations de  $f$  et de  $f^{-1}$

2. Vérifier qu'il existe dans  $[0; 1]$  un et un seul réel noté  $\alpha$  tel que  $\alpha e^\alpha = 1$ .

Montrer que  $\alpha \neq 0$ .

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \in [0; 1]$

4. a) Montrer que pour tout réel  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $f(x) - x \geq 0$ . Vérifier que l'égalité ne se produit que pour  $x = 0$ .

b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.

c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et qu'elle a pour limite 0.

5. On se propose de préciser ce résultat en déterminant un équivalent de  $u_n$

On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$

b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$

c) Montrer que  $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et en déduire que la série de terme général  $u_n$  est convergente. On note  $L$  sa somme. Montrer que  $\alpha \leq L \leq 2$ .

d) Montrer finalement que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-L}}{2^n}$

(ESC 2001)

## EXERCICE 2 : matrices et changement de variable

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi que les matrices colonne:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que  $V_1, V_2$ , et  $V_3$  sont des vecteurs propres de  $A$ . A quelles valeurs propres sont-ils associés ?
- Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$
  - Justifier la relation  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$   
On note  $D$  cette matrice diagonale.
  - Calculer la matrice  $\Delta = P^{-1}BP$  et vérifier qu'elle est diagonale.
- On se propose de calculer les matrices colonne  $X_n$  définies par les relations:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n.$$

A cet effet, on définit pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}$  :  $Y_n = P^{-1}X_n$  et on pose également  $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

- Montrer que  $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$ .
- Montrer alors que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+2} & = & u_{n+1} \\ v_{n+2} & = & 4v_n \\ w_{n+2} & = & -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

En déduire les expressions explicites de  $u_n$ ,  $v_n$ , et  $w_n$  en fonction de  $n$ .

- Donner finalement la matrice  $X_n$ , en fonction de  $n$ .

(ESC 2001)

### EXERCICE 3

1. On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul l'intégrale:  $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$
- a) Calculer pour  $A \geq 1$  l'intégrale  $\int_1^A \frac{\ln(t)}{t} dt$  et en déduire que  $I_1$  est divergente.
- b) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier  $n \geq 2$ , l'intégrale  $I_n$  converge et vaut  $\frac{1}{(n-1)^2}$
- c) Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[2; +\infty[$  par  $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2}$  et donner sa limite en  $+\infty$ . (On donne  $\sqrt{e} \approx 1,65$ )
- d) En déduire grâce à  $I_2$ , que  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$  converge (On ne cherchera pas à calculer cette série).

2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ g(t) = \frac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

- a) Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et constitue une densité de probabilité.  
( On utilisera les résultats de la question 1(b).)

On nomme dans toute la suite  $X$  une variable aléatoire admettant la densité  $g$ .

- b) Etudier l'existence et la valeur éventuelles de l'espérance  $E(X)$ .
- c) La variable  $X$  admet-elle une variance ?

3. Etude d'une variable discrète définie à partir de  $X$ .

- a) On considère la fonction  $G$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $\begin{cases} G(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ G(t) = 1 - \frac{2\ln(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  puis justifier que  $G$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

On note  $Z$  la variable aléatoire discrète définie par:

$$Z(\Omega) = N \quad \text{et} \quad Z = [X] \quad \text{partie entière de } X$$

On rappelle que si  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $k \in N$ ,  $[x] = k \Leftrightarrow k \leq x < k+1$ .

- b) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ ,  $P(Z = k) = G(k+1) - G(k)$ .
- c) En déduire par récurrence sur l'entier naturel  $n$  que :

$$\sum_{k=0}^n kP(Z = k) = -(n+1)[1 - G(n+1)] + \sum_{k=0}^n (1 - G(k+1))$$

- d) Montrer que  $(1 - G(k))$  est équivalent en  $+\infty$  à  $\frac{2\ln k}{k^2}$
- e) Déduire de l'ensemble des résultats obtenus que  $Z$  admet une espérance.