Corrigé ESC 2002 par Pierre Veuillez
EXERCICE 1 : suite d'intégrales impropres.

On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{n+1+nx^2} \qquad \text{pour tout } x \text{ strictement positif}$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par :

$$h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \qquad \text{pour tout } x \text{ strictement positif.}$$

1. Pour tout $x > 0$ on a $1 + x^2 \neq 0$ et $n + 1 + nx^2 \neq 0$ donc f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotients de fonctions continues.

   Comme $1 + x^2 > 0$ et $n + 1 + nx^2 > 0$ car $n > 0$ donc leurs signe est celui de $\ln(x)$

   On a alors :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$- \nearrow$	0	$\nearrow +$	
$f_n(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	

2. a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est impropre en $+\infty$.

   En intégrant par parties avec $u(x) = \ln(x) : u'(x) = \dfrac{1}{x} : v'(x) = \dfrac{1}{x^2} : v(x) = -\dfrac{1}{x}$

   u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
\int_1^M \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\ln(x)\frac{1}{x}\right]_1^M - \int_0^M -\frac{1}{x^2} dx \\
&= -\frac{\ln(M)}{M} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M \\
&= -\frac{\ln(M)}{M} - \frac{1}{M} + 1 \\
&\to 1
\end{aligned}$$

   quand $m \to +\infty$ car $\ln(M) \ll M$.

   Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ converge et vaut 1.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1 + x^2 \geq x^2 > 0$ donc $\dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{x^2}$ et pour $x \geq 1$ comme $\ln(x) \geq 0$ alors $0 \leq \dfrac{\ln x}{1+x^2} \leq \dfrac{\ln x}{x^2}$

   Et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ converge alors par majoration $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_1^{+\infty} h(x)\, dx$ converge également.

   Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre : $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\, dx$.

3. a) $\displaystyle\int_0^1 h(u)\, du$ est impropre en 0.

   Par changement de variable $u = \dfrac{1}{x} : u = 1 \leftrightarrow x = 1 : u = \varepsilon \leftrightarrow x = \dfrac{1}{\varepsilon}$:

$x \to \frac{1}{x}$ de classe C^1 $\left[1, \frac{1}{\varepsilon}\right]$: $du = \frac{-1}{x^2} dx$

$$\int_{\varepsilon}^{1} h(u)\ du = \int_{1/\varepsilon}^{1} -h\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx$$

Et comme

$$h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{x^2 \ln(x)}{x^2+1}$$

alors

$$\int_{\varepsilon}^{1} h(u)\ du = -\int_{1}^{1/\varepsilon} \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx \to \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx = K \quad \text{quand } \varepsilon \to 0^+$$

$\int_0^1 h(u)\ du$ converge et vaut $-K$

b) Comme $h(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$ on a $\int_0^1 |h(x)|\ dx = \int_0^1 -h(x)\ dx$ converge et vaut K

Et comme $h(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$ on a $\int_1^{+\infty} |h(x)|\ dx = \int_1^{\infty} h(x)\ dx$ converge et vaut K

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\ dx$ converge et est égale à $2K$.

c) Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ est absolument convergente donc convergente

$\int_0^{+\infty} h(x)\ dx = \int_1^{\infty} h(x)\ dx + \int_0^1 h(x)\ dx = K - K = 0$

4. a) Comme $n + 1 + nx^2 \geq 0$ et $1 + x^2 \geq 0$ alors pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| - |h(x)| &= \left|\frac{n \ln x}{n+1+nx^2}\right| - \left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right| \\
&= |\ln(x)| \left(\frac{n}{n+1+nx^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) \\
&= |\ln(x)| \frac{n + nx^2 - (n+1+nx^2)}{(n+1+nx^2)(1+x^2)} \\
&= |\ln(x)| \frac{-1}{(n+1+nx^2)(1+x^2)} \leq 0
\end{aligned}$$

Donc $0 \leq |f_n(x)| \leq |h(x)|$ et par majoration, comme $\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ converge alors $\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$ converge également.

b) Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned}
h(x) - f_n(x) &= \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{n \ln x}{n+1+nx^2} \\
&= \frac{\ln x}{1+x^2}\left(1 - \frac{n(1+x^2)}{n+1+nx^2}\right) \\
&= \frac{\ln x}{1+x^2}\left(\frac{n+1+nx^2 - n(1+x^2)}{n+1+nx^2}\right) \\
&= \frac{h(x)}{n+1+nx^2}
\end{aligned}$$

c) On a alors pour tout réel x, $n + 1 + nx^2 \geq n + 1 > 0$ et $\dfrac{1}{n+1+nx^2} \leq \dfrac{1}{n+1}$

et donc pour $x \geq 1$ et en multipliant par $h(x) \geq 0$: $0 \leq h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2} \leq \frac{h(x)}{n+1}$

En intégrant sur $[1, M]$ avec $1 \leq M$:

$$\int_1^M 0\, dx \leq \int_1^M h(x) - f_n(x)\ dx \leq \int_1^M \frac{h(x)}{n+1}\, dx = \frac{1}{n+1} \int_1^M h(x)\ dx$$

et par passage à la limite dans les inégalités (on sait déjà que les limites existent)

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}$$

De même si $0 < x \leq 1$ alors $\ln(x) < 0$ et $\dfrac{h(x)}{1+n} \leq \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2} \leq 0$ d'où en intégrant sur $[\varepsilon, 0]$ et en passant à la lmite quand $\varepsilon \to 0$:

$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant 0$$

d) Par encadrement on a alors $\int_1^{+\infty}(h(x) - f_n(x))\ dx \to 0$ et $\int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Donc $\int_1^{+\infty} f_n(x)\ dx \to \int_1^{+\infty} h(x)\ dx = K$ et $\int_0^1 f_n(x)\ dx \to \int_0^1 h(x)\ dx = -K$ quand $n \to +\infty$.
Donc $\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = \int_1^{+\infty} f_n(x)\ dx + \int_0^1 f_n(x)\ dx \to 0$ quand $n \to +\infty$

EXERCICE 2 : calcul matriciel et algèbre linéaire.

On considère un paramètre réel m, et les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$
et $A^3 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2A^2$
b) Si λ est une valeur propre de A et que X est un vecteur propre associé à cette valeur propre λ alors $AX = \lambda X$ et $A^2X = A(\lambda X) = \lambda\lambda X = \lambda^2 X$ et de même $A^3X = \lambda^3 X$
Donc $(A^3 - 2A^2)X = 0$ d'une part et d'autre part
$(A^3 - 2A^2)X = A^3X - 2A^2X = \lambda^3X - 2\lambda^2X = \left(\lambda^3 - 2\lambda^2\right)X$
Finalement $(\lambda^3 - 2\lambda^2)X = 0$
Comme $X \neq 0$ alors $0 = \lambda^3 - 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)$ donc $\lambda = 0$ ou 2 et $S_p(A) \subset \{0, 2\}$.
N.B. prouver l'inclusion, c'est démontrer un si...alors

2. Dans cette série de questions on étudie le cas $m = 0$ et on cherche à diagonaliser A.

a) et b) Pour $m = 0$ on a $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
On détermine les sous espaces propres :

$$(A-0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases} \iff x=-y-z$$

Donc 0 est valeur propre de A et son sous espace associé est $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right)$

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ -x-y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-z \\ x=-z \end{cases}$$

Donc 2 est valeur propre de A et son sous espace associé est $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}\left((-1,-1,1)\right)$

c) Comme $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right)$ et que la famille $\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right)$ est échelonnée, elle est une base de $\mathcal{S}_0$ qui est donc de dimension 2.

Comme $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}\left((-1,-1,1)\right)$ et que $(-1,-1,1) \neq 0$ alors $\left((-1,-1,1)\right)$ est une base de $\mathcal{S}_2$ qui est donc de dimension 1.

La somme des dimensino des sous-espaces propres étant 3 (taille de la matrice) alors A est diagonailisable.

Comme dans la forme diagonalisée, α apparaît deux fois, le sous espace porpre est de dimension 2 donc $\alpha = 0$

et avec $Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on a $A = QDQ^{-1}$.

d) On a $D^2 = 2D$ donc $A^2 = QD^2Q^{-1} = 2QDQ^{-1} = 2A = 2A + 0I$

Donc $a = 2$ et $b = 0$ conviennent.

3. Dans cette série de questions, on suppose que le paramètre m est <u>non nul</u>.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est A.

a) $(f - 0Id)(x,y,z) = 0 \iff (A-0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} 2x+2y+2z=0 \\ 2x+(2+m)y+(2+m)z=0 \\ -2x-(2+m)y-(2+m)z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y-z0 \\ my+mz=0 \\ -my-mz=0 \end{cases} \text{ et comme } m \neq 0 :$$

$$\iff \begin{cases} x=-y-z0 \\ y=-z \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases}$$

Donc 0 est valeur propre de f et son sous-espace porpre associé est $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\left((0,-1,1)\right)$

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2y+2z=0 \\ 2x+my+(2+m)z=0 \\ -2x-(2+m)y-(4+m)z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-z \\ 2x+2z=0 \\ -2x-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-z \\ x=-z \end{cases}$$

Donc 2 est valeur propre de f et son sous espace associé est $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}\left((-1,-1,1)\right)$

b) Un vecteur non nul formant une famille libre, $\left((0,-1,1)\right)$ est une base de $\mathcal{S}_0$ et $\left((-1,-1,1)\right)$ est une base de $\mathcal{S}_2$

La somme des dimensions des sous-espaces propres n'étant pas 3, la matrice A n'est pas diagonalisable.

c) On pose les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad ; \quad v = f_m(u) \quad ; \quad w = e_1 + e_2 - e_3 = (1, 1, -1).$$

On calcule $v = f(u)$ en passant par ses coordonnées :
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix}$
$mat_{\mathcal{B}}(f(u)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ m \end{pmatrix}$ donc $v = (0, -m, m) = m(0, -1, 1)$ donc v est un vecteur propre associé à 0.
$f(v) = 0$
et comme $w = -(-1, -1, 1)$ c'est un vecteur propre associé à 2 donc $f(w) . = 2w$

d) On montre que la famille $\mathcal{C}$ =(u, v, w) est libre :
si $xu + yv + zw = 0$ alors $x(1, -1, 0) + y(0, -m, m) + z(1, 1, -1) = 0$ donc
$\begin{cases} x + z = 0 \\ -x - my + z = 0 \\ my - z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ my = 0 \end{cases}$ et comme $m \neq 0$ on a $x = y = z = 0$
La famille est libre et a 3 vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
On a les coordonnées de leurs images dans la base (u, v, w) par :
$f(u) = v$ donc $\text{coord}_{\mathcal{C}}(f(u)) = (0, 1, 0)$
$f(v) = 0$ et $f(w) = 2w$ donc $mat_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) D'après la formule de changement de base on a : $mat_C(f) = mat_C\mathcal{B}\, mat_B(f)\ mat_{\mathcal{B}}\mathcal{C}$
Donc avec $P = \text{mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -m & 1 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$

f) Pour résoudre, on se ramène à l'écriture précédente :
$A^2 = cA + dI \iff P^{-1} \cdot A^2 \cdot P = P^{-1} \cdot (cA + dI) \cdot P \iff B^2 = cB + dI$
On calcule $(P^{-1}AP)^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
Donc si $A^2 = cA + dI$ alors $c = 0$ et $d = 0$, ce qui n'est pas une solution.
Donc on ne peut pas écrire $A^2 = cA + dI$ avec c et d réels.

(ESC 2002)

EXERCICE 3 : v.a.r. usuelles, fonctions de deux variables, optimisation.

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que :
X suit une loi binomiale de paramètres n et x (notée $B(n,x)$ avec $x \in]0,1[$).
Y suit une loi binomiale de paramètres n et y (notée $B(n,y)$ avec $y \in]0,1[$).
On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par l'égalité : $\quad Z = 2n - X - Y$.

1. a) Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = [[0,n]]$ alors $Z(\Omega) = [[0,2n]]$

   b) On a $(Z=0) = (2n - X - Y = 0)$ qui n'est possible qu'avec $X = n$ et $Y = n$
   Donc $(Z=0) = (X = n \cap Y = n)$ indépendantes donc
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z=0) = \mathrm{P}(X=n)\,\mathrm{P}(Y=n) = (xy)^n}$
   De même
   On a $(Z = 2n) = (X = 0 \cap Y = 0)$ indépendantes donc
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z=0) = ((1-x)(1-y))^n}$
   $(Z = 2n-1) = (X = 0 \cap Y = 1) \cup (X = 1 \cap Y = 0)$ incompatibles donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z=2n-1) &= \mathrm{P}(X=0\cap Y=1) + \mathrm{P}(X=1\cap Y=0)\\ &= (1-x)^n\binom{n}{1}(1-y)^{n-1}y + \binom{n}{1}(1-x)^{n-1}x(1-y)^n\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z=0) = n((1-x)(1-y))^{n-1}(x+y-2xy)}$
   et enfin
   $(Z=1) = (X = n \cap Y = n-1) \cup (X = n-1 \cap Y = n)$ incompatibles donc

$$\mathrm{P}(Z=2n-1) = x^n\binom{n}{n-1}(1-y)\,y^{n-1} + \binom{n}{n-1}(1-x)\,x^{n-1}y^n$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z=0) = n(xy)^{n-1}(x+y-2xy)}$

2. a) On a $E(X) = nx : E(Y) = ny : V(X) = nx(1-x)$ et $V(Y) = ny(1-y)$
   Donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = n[x(1-x) + nx^2]$
   et $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = n[y(1-y) + ny^2]$

   b) On pose W la variable aléatoire définie par $W = XYZ$.
   N.B. l'espérance d'un produit n'est simple que si les variables sont indépendantes, ce qu'n'est pas apriori le cas vu la définition de Z.
   On transforme donc son écriture :
   $W = XY(2n - X - Y) = 2nXY - X^2Y - Y^2X$
   Donc $E(W) = 2nE(XY) - E(X^2Y) - E(Y^2X)$ et X et Y étant elles indépendantes :

$$\begin{aligned}E(W) &= 2nE(X)E(Y) - E\left(X^2\right)E(Y) - E\left(Y^2\right)E(X)\\ &= 2n^3xy - n\left[x(1-x)+nx^2\right]ny - n\left[y(1-y)+ny^2\right]nx\\ &= n^2xy\left[2n - ((1-x)+nx) - ((1-y)+ny)\right]\\ &= n^2xy\left[2n-2-(n-1)x-(n-1)y\right]\\ &= n^2(n-1)xy\left[2-x-y\right]\end{aligned}$$

3. On pose $D =]0,1[\times]0,1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$f(x,y) = xy(2-x-y) \text{ pour tout couple } (x,y) \text{ de } D$$

a) Comme les fonctions coordonnées $(x,y) \to x$ et $(x,y) \to y$ sont C^2 sur D alosr f l'est aussi comme produit de fonctions C^2.

b) On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y(2-x-y) - xy = 2y - y^2 - 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x(2-x-y) - xy = 2x - x^2 - 2xy \end{aligned}$$

Donc sur l'ouvert D, si f a un extremum local en (x,y) alors

$\begin{cases} 2y - y^2 - 2xy = 0 \\ 2x - x^2 - 2xy = 0 \quad L_1 - L_2 \end{cases}$ donc $2(x-y) - (x^2 - y^2) = 0$ et $(x-y)(2-(x+y)) = 0$ et comme $x < 1$ et $y < 1$ alors $2-(x+y) > 0$ et donc $x - y = 0$ et $x = y$

Donc (L_1) : $2y - y^2 - 2y^2 = 0$ donc $y(2-3y) = 0$ et comme $y \neq 0$ on a $y = \frac{2}{3}$ et donc $x = \frac{2}{3}$

Conclusion : $\boxed{\text{le seul point critique sur } D \text{ est } \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

c) On a :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2 - 2y - 2x \\ t &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x \end{aligned}$$

et en $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$: $r = -\frac{4}{3}$: $s = -\frac{2}{3}$ et $t = -\frac{4}{3}$ donc $rt - s^2 = \frac{12}{9} > 0$

Donc f a un extremum local en ce point et comme $r < 0$ c'est un maximum.

$f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}(2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{8}{27}$

Conclusion : $\boxed{f \text{ admet un maximum local en } \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ qui vaut : } f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}}$

d) On développe :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2 \\ &= -x^2y - xy^2 + 2xy - \frac{8}{27} \end{aligned}$$

: :et d'autre part

$$\begin{aligned} f(x,y) - \frac{8}{27} &= xy(2-x-y) - \frac{8}{27} \\ &= -x^2y - xy^2 + 2xy - \frac{8}{27} \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

$$f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$$

Pour $0 < y < 1$ on a : $y - \frac{8}{3} \leq 0$ et $\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ donc $\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2\left(y - \frac{8}{3}\right) \leq 0$ et de même $-y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2 \leq 0$ donc $f(x,y) - \frac{8}{27} \leq 0$ et pour tout $(x,y) \in D$: $f(x,y) \leq \frac{8}{27} = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Donc $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est un maximum global de f.

4. On suppose que les variables X, Y définies plus haut représentent, en centimètres, la largeur et la longueur d'une brique, dont la hauteur Z est telle que la somme des côtés, $X+Y+Z$, est toujours égale à 56 cm, et de volume XYZ.

   a) On a $X+Y+Z=56$ donc $Z=56-X-Y$. et on a avec $n=28$ les conditions de l'exercice si-dessus.

      (longueur>largeur ...? quitte à inverser X et Y)

      On a alors $E\left(XYZ\right)=n^2\left(n-1\right)xy\left[2-x-y\right]$ est maximale pour $x=y=\frac{2}{3}$

   b) Et le volume maximal moyen est donc $n^2\left(n-1\right)f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=28^2\cdot 27\cdot\frac{8}{27}=28^2\cdot 8=6272$

      Conclusion : $\boxed{\text{le volume moyen maximum est de } 6272\ cm^3.}$