ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités ý encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[\ 0\ ;\ a\ ]$ par :

$$\text{Pour tout } x \in [0;a], \quad f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

1.

(a) Pour tout $x \in [0,a]$ on a $a+x \neq 0$ donc f_a est dérivable sur $[0;a]$ comme quotient de fonction dérivables et

$$f_a'(x) = \frac{-(a+x)-(a-x)}{a(a+x)^2} = \frac{-2}{(a+x)^2}$$

Donc

x	0		a
$f_a'(x)$		$-$	
$f_a(x)$	$\frac{1}{a}$	$\searrow$	0

(b) Comme f_a est continue et strictement décroissante sur $[0,a]$ elle est bijective de $[0,a]$ dans $[f_a(a)\,;f_a(0)] = [0;\frac{1}{a}]$.

On a alors par symétrie le tableau des variations de f_a^{-1} :

x	0		$\frac{1}{a}$
$f_a(x)$	a	$\searrow$	0

(c) On a, pour tout $x \in [0,a]$ et tout $y \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$:

$$\begin{aligned} f_a(x) = y &\iff \frac{a-x}{a(a+x)} = y \\ &\iff a - x = ya(a+x) \\ &\iff x(-1-ay) = a^2y - a \\ &\iff x = \frac{a(1-ay)}{1+ay} \text{ car } 1+ay \neq 0 \end{aligned}$$

Donc la réciroqie de f_a est définie par : $f_q^{-1}(y) = \frac{a(1-ay)}{1+ay}$ pour tout $y \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$

Or pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$

$$f_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{\frac{1}{a} - x}{\frac{1}{a}(\frac{1}{a}+x)} = \frac{a(1-ax)}{1+ax}$$

On a donc bien $f_a^{-1} = f_{1/a}$

N.B. on aurait aussi pu montrer que pour tout $x \in [0,a]$: $f_{1/a}(f_a(x)) = x$ et pour tout $y \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$: $f_a\left(f_{1/a}(y)\right) = y$ pour pouvoir conclure égalment.

2.

(a) Comme f_a est continue sur $[0,a]$ alors $\int_0^a f_a(x)dx$ est bine définie.

(b) Pour tout $x \neq -1$ on a : $-1 + \dfrac{2}{1+x} = \dfrac{1-x}{1+x}$ donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ conviennent.

Donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 -1 + \frac{2}{1+x}dx \\ &= \left[-x + 2\ln(1+x)\right]_{x=0}^1 \quad \text{car } 1+x>0 \\ &= -1 + 2\ln(2) \end{aligned}$$

(c) On effectue dans $I_a = \int\limits_0^a f_a(x)\,dx$ le changement de variable $x = a\,u$: $dx = a\,du$: $x = 0 \leftrightarrow u = 0$: $x = a \leftrightarrow u = 1$

avec $\varphi : u \rightarrow au$ de classeC^1 sur $[0,1]$ et f_a continue sur $\varphi([0,1])$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^a f_a(x)\,dx &= \int\limits_0^a \frac{a-x}{a(a+x)}dx \\ &= \int\limits_0^1 \frac{a-au}{a(a+au)}adu \\ &= \int\limits_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = I_1\end{aligned}$$

3. On considère dans ce paragraphe la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0;a], & h_a(x) = \dfrac{1}{2\ln 2 - 1} f_a(x) \\ \text{si } x \notin [0;a], & h_a(x) = 0 \end{cases}$$

(a) h_a est continue sur $\mathbb{R} - \{0, a\}$, positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} h_a$ est impropre en $+$ et $-\infty$

$\int_{-\infty}^{0} h_a = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$: $\int_a^{+\infty} h_a = \int_a^{+\infty} 0 = 0$ et enfin $\int_0^a h_a = \dfrac{1}{2\ln 2 - 1} \int_0^a f_a = 1$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h_a$ converge et vaut 1.

Donc h_a est bien une densité de probabilité.

On note X_a une variable aléatoire réelle admettant une densité égale ý h_a .

On note H_a la fonction de répartition de la variable X_a.

(b) $a + X_a$ a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} (a+x)\,h_a(x)\,dx$ converge.

Or en dehors de $[0,a]$ la fonction h_a est nulle donc l'intégralle converge et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (a+x)\,h_a(x)\,dx &= \int_0^a \frac{1}{2\ln 2 - 1}(a+x)\,\frac{a-x}{a(a+x)}dx \\ &= \frac{1}{a(2\ln 2 - 1)} \int_0^a (a-x)\,dx \\ &= \frac{1}{a(2\ln 2 - 1)} \left[-\frac{1}{2}(a-x)^2\right]_0^a \\ &= \frac{a}{2(2\ln 2 - 1)} = E(a + X_a)\end{aligned}$$

N.B la primitive en $(a-x)^2$ au lieu de x^2 permet d'obtenir directement l'expression factorisée.

On a alors $E(X_a) = E(a + X_a - a) = E(a + X_a) - a = \dfrac{a}{2(2\ln 2 - 1)} - a$

(c) De même

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (a+x)^2\,h_a(x)\,dx &= \frac{1}{a(2\ln 2 - 1)} \int_0^a (a-x)(a+x)\,dx \\ &= \frac{1}{a(2\ln 2 - 1)} \int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx \\ &= \frac{1}{a(2\ln 2 - 1)} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a \\ &= \frac{2a^2}{3(2\ln 2 - 1)} = E\left((a + X_a)^2\right)\end{aligned}$$

Comme $(a+X_a)^2 = a^2 + 2aX_a + X_a^2$
on a alors

$$\begin{aligned}
E\left(X_a^2\right) &= E\left((a+X_a)^2 - a^2 + 2aX_a\right) = E\left((a+X_a)^2\right) - a^2 - 2aE\left(X_a\right) \\
&= \frac{2a^2}{3\left(2\ln 2 - 1\right)} - a^2 - 2a\left(\frac{a}{2\left(2\ln 2 - 1\right)} - a\right) \\
&= a^2 - \frac{a^2}{3\left(2\ln 2 - 1\right)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V\left(X_a\right) &= E\left(X_a^2\right) - E\left(X_a\right)^2 \\
&= a^2 - \frac{a^2}{3\left(2\ln 2 - 1\right)} - \left(\frac{a}{2\left(2\ln 2 - 1\right)} - a\right)^2 \\
&= a^2\left[1 - \frac{1}{3\left(2\ln 2 - 1\right)} - \frac{1}{4\left(2\ln 2 - 1\right)^2} + \frac{1}{\left(2\ln 2 - 1\right)} - 1\right] \\
&= \frac{1}{12}a^2\frac{16\ln 2 - 11}{\left(2\ln 2 - 1\right)^2}
\end{aligned}$$

(d) Soit la variable aléatoire à densité T définie par $T = \dfrac{1}{a}X_a$.

On a pour tout réel t de $[\ 0\ ;\ 1\ ]$: $P(T \leqslant t) = P\left(\dfrac{1}{a}X_a \leq t\right) = P\left(X_a \leq at\right) = H_a(at)$.

Donc la densité de T est $h\left(t\right) = 0$ si $t \notin [0,1]$ et

$$h\left(t\right) = H_a'\left(at\right)\ a = h_a\left(at\right)\ a = \frac{1}{2\ln 2 - 1}\frac{a - at}{a(a+at)}a = \frac{1}{2\ln 2 - 1}\frac{1-t}{1+t} = h_1\left(t\right)$$

Donc T suit bien la même loi que X_1.

EXERCICE 2

On considère pour n entier naturel non nul la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{-1}{n} & 1 \end{pmatrix} \text{ et on note } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_n relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1,1,-1)$, $\vec{v} = (1,1,0)$ et $\vec{w} = (0,-1,1)$.

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. (a) Les coordonnées de (x,y,z) dans la base canonique sont (x,y,z)

   Donc les coordonnées de l'image sont données par : $mat_{\mathcal{C}}\left(f_n\left(x,y,z\right)\right) = A_n\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   Donc $f_n\left(x,y,z\right) = \left(x + \dfrac{1}{n}y + \dfrac{1}{n}z\,;\ \dfrac{-1}{n}x + \dfrac{n+2}{n}y + \dfrac{1}{n}z\ ;\ \dfrac{1}{n}x + \dfrac{-1}{n}y + z\right)$

   (b) En particulier
   - $f_n\left(\vec{u}\right) = (1,1,-1) = \vec{u}$
   - $f_n\left(\vec{v}\right) = \left(\dfrac{n+1}{n}, \dfrac{n+1}{n}, 0\right) = \dfrac{n+1}{n}\vec{v}$

- $f_n(\vec{w}) = \left(0, \dfrac{-n-1}{n}, \dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{n+1}{n}\vec{w}$

  Donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont vecteurs propres de f_n.

(c) Montrons que la la famille $\mathcal{B} = (\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ )$ est libre :

Si $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w} = 0$ alors $(x+y, x+y-z, -x+z) = 0$ donc $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y-z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} y=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $L2+L$

par substitution

Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre et elle a trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

(d) On reconnait une formule de changement de base.

Dans la base $\mathcal{B}$ les coordonnées de $f_n(\vec{u}) = \vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}$ sont $(1, 0, 0)$.

De même celles de $f_n(\vec{v}) = \frac{n+1}{n}\vec{v}$ sont $\left(0, \frac{n+1}{n}, 0\right)$ et celles de $f_n(\vec{w}) = \frac{n+1}{n}\vec{w}$ sont $\left(0, 0, \frac{n+1}{w}\right)$

La matrice de f_n dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

D_n

Soit P la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$.

Ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ en calculant les produits $P \cdot P^{-1} = I$ et $P^{-1}P = I$

et d'après la formule de changement de base, la matrice de f_n dans la base $\mathcal{B}$ est alors

$$mat_{\mathcal{B}} f_n = P^{-1} \cdot mat_{\mathcal{C}} f_n \cdot P$$

ou encore

$$D_n = P^{-1} A_n P$$

2. On pose pour tout entier naturel n non nul $\Pi_n = A_1 A_2 \cdots A_n$ (avec $\Pi_1 = A_1$).

(a) On a $\Pi_n = A_1 A_2 \cdots A_n = P^{-1} D_1 P P^{-1} D_2 P P^{-1} \cdots P P^{-1} D_n P = P D_1 D_2 \cdots D_n P^{-1}$.

(b) Par récurrence :

- Pour $n = 1$ on a $D_1 = I + \frac{1}{1}H = I + H$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D_1 D_2 \cdots D_n = I + nH$

  Alors

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \cdots D_n D_{n+1} &= (D_1 D_2 \cdots D_n) D_{n+1} \\ &= (I + nH)\left(I + \frac{1}{n+1}H\right) \\ &= I + \left(n + \frac{1}{n+1}\right)H + \frac{n}{n+1}H^2 \end{aligned}$$

Or $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{pmatrix} = H$ donc

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \cdots D_n D_{n+1} &= I + \left(n + \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right)H \\ &= I + (n+1)H \end{aligned}$$

– Donc pour tout entier $n \geq 1$ on a $D_1 D_2 \cdots D_n = I + nH$

(c) Comme $\Pi_n = P D_1 D_2 \cdots D_n P^{-1} = P\left(I + nH\right) P^{-1} = I + nPHP^{-1}$ on calcule alors :
$PHP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Et $\Pi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 1+2n & n \\ n & -n & 1 \end{pmatrix}$

3. (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, comme D_i est triangulaire (diagonale), et que ses coefficients digonaux sont non nuls ($n \neq -1$) elle est inversible.
Donc $D_1 D_2 \cdots D_n$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
Pour vérifier que sont inverse est $I - \dfrac{n}{n+1} H$ on calcule leur produit. $D_1 D_2 \cdots D_n = I + nH$
$(I + nH)\left(I - \dfrac{n}{n+1} H\right) = I + \left(n - \frac{n}{n+1}\right) H - \frac{n^2}{n+1} H^2$ et comme $H^2 = H$
$= I + \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+1}\right) H = I$
Donc
$$(D_1 D_2 \cdots D_n)^{-1} = I - \frac{n}{n+1} H$$

(b) Enfin $\Pi_n = P D_1 D_2 \cdots D_n P^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
et $\Pi_n^{-1} = .\left(P^{-1}\right)^{-1} \left(D_1 D_2 \cdots D_n\right)^{-1} P^{-1}$ (l'ordre est inversée lors de l'inversion du produit)
$\Pi_n^{-1} = P\left(I - \dfrac{n}{n+1} H\right) P^{-1} = I - \dfrac{n}{n+1} PHP^{-1}$

$$\begin{aligned} \Pi_n^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{n}{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{n+1} & -\frac{n}{n+1} \\ \frac{n}{n+1} & 1 - 2\frac{n}{n+1} & -\frac{n}{n+1} \\ -\frac{n}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EXERCICE 3

On suppose que p est un réel fixé de $]0; 1[$ qui représente la probabilité qu'un billet de 100 euros soit faux. On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux .
On note F : " Le billet testé est faux " et B : " La lumière qui s'allume est bleue ".
On note $P(\bar{F}/B) = \alpha$ et $P(F/\bar{B}) = \beta$, et on suppose dans tout l'exercice que $\alpha + \beta > 1$.

1.

(a) En utilisant une formule des probabilités totales pour exprimer $P(F)$, montrer que
$$P(B) = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}.$$
En déduire que $1 - \alpha \leqslant p \leqslant \beta$.

(b) Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est
$$P(B/F) = \frac{(1-\alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}.$$

(c) On suppose dans cette question uniquement que $\beta = \alpha = 0,95$ et on note

$$x = \alpha + p - 1 = p - 0,05.$$

Montrer que $1 - P(B/F) = \dfrac{0,95x}{0,9(x+0,05)}$.
En déduire un réel a tel que $P(B/F) = 1 - ax + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varepsilon(x) = 0$.

2. On considère le programme Turbo-Pascal suivant , où p représente la valeur p citée en introduction

```
program ESC2003 ;
var x , v , d , r : real ;
begin
randomize ;
if random < p then v := 0 else v := 1 ;
r := random ;
x := r * r ;
d := ( 1 - x ) * v + x * ( 1 - v ) ;
end.
```

On rappelle que random est une variable ý densité qui suit une loi uniforme et qui fournit ý chaque appel un réel choisi au hasard dans $[0;1]$. Les deux appels ý la fonction random sont indépendants. On note V, D, R, les variables aléatoires égales au valeurs de v ,d ,r lorsque le programme a été exécuté.

(a) Montrer que $P(V = 0) = p$.

(b) Exprimer D en fonction de R et de V .

(c) Soit s un réel fixé de $]\ 0\,;\,1\ [$, appelé " seuil ".
En remarquant que R et V sont deux variables aléatoires indépendantes, montrer que :

$$P(D < s/V = 0) = \sqrt{s} \text{ et } P(D \geqslant s/V = 1) = \sqrt{1-s}.$$

En déduire

$$P(D < s) = p\sqrt{s} + (1-p)(1 - \sqrt{1-s}).$$

On utilise ce programme pour simuler un détecteur , avec ($V = 0$) pour " le billet est faux " et ($D < s$) pour " le rouge s'allume ".

(d) Montrer que la probabilité que le détecteur se trompe est égale ý $1 - (\ 1 - p\ )\sqrt{1-s} - p\sqrt{s}$.

(e) On suppose ici que $p = \dfrac{1}{4}$. Etudier sur $]0;1[$ la fonction définie par $f(t) = 3\sqrt{1-t} + \sqrt{t}$.
En déduire que pour le seuil $s = \dfrac{1}{10}$ la qualité du détecteur est maximum.